Charlier, Carl Vilhelm
Ludwig
Untersuchung über die
allgemeinen Jupiter-Störungen
des Planeten Thetis

PURCHASED FOR THE

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

FROM THE

CANADA COUNCIL SPECIAL GRANT

FOR

HIST SCI '68

KONGL. SVENSKA VETENSKAPS-AKADEMIENS HANDLINGAR. Bandet 22. N:o 2.

UNTERSUCHUNG

ÜBER

DIE ALLGEMEINEN JUPITER-STÖRUNGEN

DES

PLANETEN THETIS.

VON

C. V. L. CHARLIER.

BEI DER KÖNIGL. SCHWED. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN EINGEREICHT DEN 15 SEPTEMBER 1886.

STOCKHOLM. P. A. NORSTEDT & SÖNER.

Pris 5 kronor.

Af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien utgifna skrifter.

(Ouvrages publiés par l'Académie Royale des Sciences de Suède.)

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar.

1:a Serien, årg. 1739—1854, in 8:o.

2:a Serien, årg. fr. o. m. 1855, in 4:o.

Första Bandet. Första häftet. **(1855.)** Fullst. 6 Rdr 25 öre: *) Pris:

1. Om Fiskyngels utveckling af Carl J. Sundevall. (med 5 taflor) (24 sid.) 1,75.
2. Om phonetiska bokstäfver af Carl J. Sundevall. (med 3 tabeller) (68 sid.) 2,50.
3. Försök till uppställning och beskrifning af de i Sverige funna Tryphonider af Aug. Emil Holmgren (154 sid.) 4,75.
4. Om de iakttagelser öfver Vattenhöjdens och Vindarnes förändringar, som nyligen blifvit vid åtskilliga fyrbåksstationer kring Sveriges kuster tillvägabragta; jemte tabellariska sammandrag af observationerna för åren 1852—55; af A. Erdmann. (med 2 taflor) (58 sid.) 2,00.

Andra häftet. **(1856.)** Fullst. 6 Rdr.

5. Försök till uppställning och beskrifning af de i Sverige funna Tryphonider; af Aug. Emil Holmgren. Fortsättning. (med 2 taflor) (90 sid.) 3,00.
6. Om Terrestra Refraktions theorie af D. G. Lindhagen (46 sid.) 1,50.
7. Beskrifning öfver Dalkarlsbergs jernmalmsfält uti Nora Socken och Örebro Län, af A. Erdmann. (med 14 taflor) (44 sid.) 4,50.
8. Om justeringen af rikslikare-skålpundets kopior (10 sid.) 0,50.

Andra Bandet. Första häftet. **(1857.)** Fullst. 6 Rdr.

1. Om äggets läge inom ovariet hos de phanerogama vexterna, af J. G. Agardh. (med 1 tafla) (12 sid.) 0,50.
2. Den magnetiske inclinations periodiske förandringer, af Chr. Hansteen. (med 1 tavle) (22 sid.) 0,75.
3. Kritisk framst. af fogelarterna uti äldre ornith. arbeten; af C. J. Sundevall. 1. Museum Carlsonianum. 2. Le Vaillant, Oiseaux d'Afrique (60 sid.) 1,75.
4. Kafferlandets Dag-fjärilar, insamlade åren 1838—1845 af J. A. Wahlberg, beskrifna af H. D. J. Wallengren. (56 sid.) 1,75.
5. Om de båda summorna $\sum_{i=0}^{i=n-1} (x+ih)^{\mu}$, $\sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^{i}(x+ih)^{\mu}$ för reela u-valörer, af E. G. Björling (18 sid.) 0,50.
6. Bidrag till läran om den Kristallografiska Isomorfin och Dimorfin, af A. E. Nordenskiöld (22 sid.) 0,75.

Andra häftet. **(1858.)** Fullst. 6 Rdr 25 öre.

7. Bidrag till Rio Janeiro-traktens Hemipter-fauna, I; af C. Stål. (84 sid.) 2,00.
8. Försök till uppställning och beskrifning af de i Sverige funna Ophionider, af Aug. Emil Holmgren (158 sid.) 5,25.
9. Analyser af atmosferisk luft i Stockholm, af J. F. Bahr. (14 sid.) 0,50.
10. Zoologiska Anteckningar under en resa i södra delarne af Caplandet åren 1853—1855, af J. F. Victorin. Ur den aflidnes papper samlade och ordnade af J. W. Grill. (Med 1 tafla) (62 sid.) 2,50.

Tredje Bandet. Första häftet. **(1859.)** Fullst. 6 Rdr 25 öre.

1. Bidrag till kännedomen om Skandinaviens Amphipoda Gammaridea, af Ragnar M. Bruzelius. (med 4 taflor) (104 sid.) 4,00.
2. Om Differential-Equationers Integrering, af C. J. Malmsten. (94 sid.) 2,75.
3. Analytiska undersökningar af Svenska Mineralier, utförda på Upsala Universitets Laboratorium för Mineral-Kemi och med tillämpning af theorien om Polymer Isomorphi, sammanstallda af E. Walmstedt. (20 sid.) 0,75.
4. Undersökningar i högre Algebran jemte några deraf heroende Theoremer i Determinant-theorien, V. von Zeipel (32 sid.) 1,25.
5. Om Justeringen af två nya Rikslikare för Svenska Längdmåttet. af N. H. Selander. Fab. Wrede. Er. Edlund (13 sid.) 0,50.

Andra häftet. **(1860.)** Follst. 10 Rdr 50 öre.

6. Bidrag till Rio Janeiro-traktens Hemipter-Fauna, II; af C. Stål. (75 sid.) 2,00.
7. Skandinaviens Fjädermott (Alucita Lin.), beskrifna af H. D. J. Wallengren (26 sid.) 1,00.
8. Bidrag till kännedomen om Krustaceer, som lefva i arter af slägtet Ascidia L.; af T. Thorell. (med 14 taflor) (84 sid.) 4,50.
9. Om Insekternas extremiteter samt deras hufvud- och mundelar; af C. J. Sundevall. (med 4 taflor) (92 sid.) 3,50.
10. Försök till uppställning och beskrifning af Sveriges Ichneumonider. Tredje serien. Fam. Pimpliariæ; af Aug. Emil Holmgren. (76 sid.) 2,50.
11. Bidrag till kännedom om Salpetersyrlighetens föreningar med enatomiga baser; af Johan Lang (40 sid.) 1,50.

Fjerde Bandet. Första häftet. **(1861.)** Fullst. 6 Rdr.

1. Studier öfver Nutidens Koprogena Jordbildningar, Gyttja, Torf och Mylla; af Hampus von Post (60 sid.) 1,75.
2. Ett försök att bestämma de af Aristoteles omtalade Djurarterna; af Carl J. Sundevall. I. luftfarande djur, eller klasserna: Däggdjur, Foglar, Reptilier och Insekter med Arachnider (148 sid.) 3,75.
3. Undersökning af Fayeska Kometens bana; af Axel Möller. (90 sid.) 2,50

*) Under hvarje häfte uppräknas de särskilda afhandlingar detsamma innehåller, med utsatt pris för hvardera

Andra Häftet. **(1862.)** Fullst. 4 Rdr.

4. Komparationer mellan Struves Dubbel-Toise och den för Sv. Vet.-Akad. räkning förfärdigade kopian af densamma; af D. G. Lindhagen (10 sid.) 0,50
5. Geografiska Ortbestämningar på Spetsbergen af A. E. Nordenskiöld, beräknade och sammanställda af D. G. Lindhagen (48 sid.) 1,50.
6. Geognostiska iakttagelser under en resa till Spetsbergen år 1861; af C. W. Blomstrand. (med 2 taflor) (46 sid.) 2,00
7. Geografisk och Geognostisk Beskrifning öfver Nordöstra delarne af Spetsbergen och Hinlopen Strait; af A. E. Nordenskiöld. (Med Karta). (26 sid.) 2,00

Femte Bandet. Första Häftet. **(1863.)** Fullst. 5 Rdr

1. Anteckningar till en Monografi öfver Växtfamiljen Valerianeæ, 1. Valerianella, Hall. af Thorgny O. B. N. Krok. (med 4 taflor). (106 sid.) 3,00.
2. Om de Transcendenta Funktionerna $Z(a)$ och Ga jemte uträkning af deras värden för flera värden på a; af C. F. Lindman (18 sid.) 0,75.
3. En Grupp Formler, som beröra de Elliptiska Funktionerna af första slaget; af Göran Dillner (20 sid.) 0,75.
4. Heterocer-Fjärilar, samlade i Kafferlandet af J. A. Wahlberg, beskrifna af H. D. J. Wallengren (84 sid.) 2,00.

Andra Häftet. **(1864.)** Fullst 4 Rdr 50 öre.

5. Om salpetersyrlighetens föreningar med några platinabaser samt med ethylamin och tetramethyl-ammoniumoxid; af Johan Lang. (18 sid.) 0,50.
6. I. Om multipla integralers transformation; af Hj. Holmgren. (40 sid.) 1,00.
7. Några platinametallers chlorider i deras förhållande till salpetersyrliga salter; af Johan Lang (10 sid.) 0,50.
8. Bestämning af några Funktioners högre derivator samt af åtskilliga dermed sammanhängande definita integraler; af C. F. Lindman. (30 sid.) 0,75
9. Om de Fraunhoferska linierna jemte teckning af den violetta delen af solspektrum; af A. J. Ångström och R. Thalén. (med 2 taflor). (8 sid.) 1,00.
10. Pyreneernas Mossvegetation i Luchons omgifningar; af J. E. Zetterstedt (52 sid.) 1,00.
11. Om differentialkalkylen med indices af hvad natur som helst; af Hj. Holmgren (84 sid.) 2,00.

Sjette Bandet. Första häftet. **(1865.)** 4 Rdr 50 öre.

1. Monographia Salicum, 1. Auctore N. J. Andersson. (med 9 taflor). (180 sid.) 4,50.

Andra häftet. **(1866.)** Fullst. 5 Rdr 50 öre.

2. Om vegetationen i de högländtaste trakterna af Småland; af J. E. Zetterstedt (36 sid.) 1,00.
3. Om definita integraler mellan imaginära gränsor; af C. J. Malmsten. (18 sid.) 0,75.
4. Bidrag till kännedomen om ammoniakaliska Kromföreningar; af P. T. Cleve. (32 sid.) 1,00.
5. Anteckningar till Spetsbergens Geografi; af N. Dunér och A. E. Nordenskiöld. (med 1 karta (16 sid.) 3,50
6. Om Trias- och Jura-försteningar från Spetsbergen; af G. Lindström. (med 3 taflor) (20 sid.) 1,25.
7. Utkast till Spetsbergens geologi; af A. E. Nordenskiöld. (m. 2 kart.) (36 sid.) 3,00.
8. Förberedande undersökningar rör. utförbarheten af en gradmätning på Spetsbergen; af N. Dunér o. A. E. Nordenskiöld. (med 1 karta) (20 sid.) 1,00

Sjunde Bandet. Första häftet. **(1867.)** Fullst. 5 Rdr.

1. Bidrag till kännedomen om Islands bergsbyggnad; af C. W. Paijkull. (med 1 karta) (50 sid.) 1,50.
2. Lichenes Spitsbergenses determinavit Th. M. Fries. (54 sid.) 1,25.
3. Anteckningar om djurlifvet i Ishafvet mellan Spetsbergen och Grönland; af A. Quennerstedt (med 3 taflor) (36 sid.) 2,50.
4. Bidrag till kännedom af Pleuronektoidernas utveckling och byggnad; af A. W. Malm. (med 2 taflor) (28 sid.) 1,50.
5. Beskrifning på en apparat för registrering af observationer på luftens temperatur, fuktighetsgrad och pression; af A. G. Theorell. (med 2 taflor) (12 sid.) 1,25
6. Om några derivator af den Gros'ska Platinabasen; 1:sta Afdelningen; af P. T. Cleve (22 sid.) 0,50.

Andra Häftet. **(1868.)** Fullst. 5 Rdr 50 öre.

7. Om några derivator af den Gros'ska Platinabasen; 2:dra Afdelningen; af P. T. Cleve (22 sid.) 0,50.
8. Bidrag till kännedomen af Spetsbergens Alger, jemte tillägg; af J. G. Agardh. (med 3 taflor) (38 sid.) 1,75.
9. Sur l'intégration de l'équation différentielle.

   $(a_2 + b_2x + c_2x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1x)\frac{dy}{dx} + a_0y = 0$; par

   Hj. Holmgren (58 sid.) 1,50.
10. Bestämning af vigtförhållandet mellan det Svenska skålpundet och den Franska kilogrammen; af E. Edlund (32 sid.) 1,00.
11. Hemiptera Fabriciana. Fabricianska Hemipterarter efter de i Köpenhamn och Kiel förvarade typexemplaren, granskade och beskrifna af C. Stål. 1:ata afdelningen (148 sid.) 2,50.

Åttonde Bandet (1869). Fullst. 12 Rdr.

1. Hemiptera Fabriciana. Fabricianska Hemipterarter, efter de i Köpenhamn och Kiel förvarade typexempl., granskade och beskr. af C. Stål. 2:a afd. (130 sid.) 3,00.

KONGL. SVENSKA VETENSKAPS-AKADEMIENS HANDLINGAR Bandet 22. N:o 2.

UNTERSUCHUNG

ÜBER

DIE ALLGEMEINEN JUPITER-STÖRUNGEN

DES

PLANETEN THETIS.

VON

C. V. L. CHARLIER.

BEI DER KONIGL. SCHWED. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN EINGEREICHT DEN 15 SEPTEMBER 1886.

STOCKHOLM, 1887.
KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

LIBRARY
NOV 27 1968
UNIVERSITY OF TORONTO

QB
378
T5C53

Die rasch anwachsende Zahl der kleinen Planeten zwischen Jupiter und Mars lässt es als mehr und mer wünschenswerth erscheinen, die jedes Jahr wiederkehrenden Berechnungen ihrer speciellen Störungen durch Anwendung ihrer allgemeinen Störungsausdrücke ersetzen zu können. Um dieses Ziel zu erreichen bedürfte es der Kenntniss einer Bahn, die von der wahren Bahn des Planeten *immer* nur um kleine Grössen abweicht, und die in den letzten Jahren gemachten Untersuchungen geben wirklich eine Möglichkeit an die Hand solche Bahnen anzugeben, noch ist es aber bequemer sich mit einer Bahn zu begnügen, die für eine beschränkte Zeit den Ort des Planeten darstellt. Die Methode, die man gewöhnlich benutzt, ist die von HANSEN in seinen bekannten Abhandlungen »Auseinandersetzung etc.»[1]): seine Wahl der Koordinaten, welche die Störungen in sehr zusammengedrängter Form darzustellen erlaubt, und überdiess grosse Glieder nur in einer einzigen Koordinate giebt, seine Methode zur Entwickelung der Störungsfunktion, die, schon von CAUCHY gegeben, zuerst von HANSEN ihre jetzige für numerische Rechnung geeignete Form erhielt, und endlich seine einfachen aber für den Rechner so angenehmen Methoden jeden Schritt der Rechnung zu kontrolliren; das sind die Vorzüge, die zusammen den Hansenschen Methoden einen so hohen Werth geben.

Die schwierigste Aufgabe bei der Berechnung allgemeiner Störungen liegt in der Entwickelung der Störungsfunktion; ich habe in dem Folgenden einige Methoden angegeben, die wenigstens in vielen Fällen denen von HANSEN vorzuziehen sind; die eine ist nur eine kleine Modifikation von der Hansenschen, die es aber erlaubt die Koefficienten der Entwickelungen aus Tafeln zu nehmen, was die Rechnung bedeutend verkürzt; die andere ist darin eigenthümlich, dass die Glieder von derselben Ordnung in Bezug auf die Excentricität gleichzeitig berechnet werden, wobei ich einige berühmte Untersuchungen von GAUSS über die Transformation von elliptischen Integralen benutzt habe.

Nachdem die Störungen berechnet sind, bleibt noch eine beträchtliche Arbeit übrig: das Tabuliren derselben, welche Arbeit kaum geringer ist als diejenige, die für das Berechnen der Störungen erforderlich ist. Die Ursache, warum die Störungsausdrücke so schwer zu verwerthen sind, liegt hauptsächlich darin, dass dieselben Funktionen von zwei Argumenten sind, welchen Übelstand ich dadurch vermeide, dass ich, einige von prof. GYLDÉN gegebene Resultate benutzend, die Störungsausdrücke nach den Vielfachen zweier Argumente umordne, *von denen das eine während eines halben Umlaufes des Planeten konstant ist*, übrigens aber sich sprungweise verändert; die Störungen werden dadurch auf so wenige Glieder gebracht, dass das Tabuliren unnöthig wird.

[1]) Der vollständige Titel lautet: Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten von P. A. HANSEN. 3 Abhdl.

Entwickelung der Störungsfunktion.

1. Ausser der Störungsfunktion müssen verschiedene Differentialquotienten derselben in Reihen entwickelt werden. Bei der Theorie von LAPLACE hatte dies keine Schwierigkeit, da seine Methode zur Entwickelung der Störungsfunktion gestattete diese Differentialquotienten direkt durch Differentiation zu erhalten; in der Methode von HANSEN ist dies aber nicht der Fall[1]); HANSEN hat indess gezeigt, dass die erforderlichen Ausdrücke sich aus den negativen ungeraden Potenzen des Abstandes zwischen dem störenden und dem gestörten Körper zusammensetzen, und die eigentliche Schwierigkeit liegt daher nur darin diese letztern zu bilden.

Bevor wir zur Entwickelung derselben übergehen, senden wir einige Bemerkungen über die Entwickelung von periodischen Funktionen voraus. Es sei $f(\varphi, \psi)$ eine eindeutige einfachperiodische Funktion der beiden Veränderlichen φ und ψ; wenn wir für einen Augenblick ψ als konstant annehmen, so lässt sich bekanntlich $f(\varphi, \psi)$ für alle Werthe von φ zwischen zwei parallelen Streifen durch die folgende Reihe darstellen

$$f(\varphi, \psi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(\psi) e^{in\varphi} \tag{1}$$

wo

$$\Phi_n(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi, \psi) e^{-in\varphi} d\varphi \tag{1*}$$

wie man augenblicklich findet, wenn man die beiden Seiten von (1) mit $e^{-in\varphi} d\varphi$ multiplicirt und dann integrirt; wir bekommen demnach für $\Phi_n(\psi)$ den folgenden Ausdruck

$$\Phi_n(\psi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(n)} e^{im\psi} \tag{2}$$

$$a_m^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_n(\psi) e^{-im\psi} d\psi . \tag{2*}$$

Wenn beide Integrationen sich ausführen lassen, so ist die Aufgabe gelöst; wenn aber nur die eine, oder sogar keine derselben durch bekannte Funktionen ausdrückbar ist, so

[1]) NEWCOMB hat gezeigt wie man auch bei Anwendung der Hansenschen Koordinaten die Differentialquotienten wirklich aus der Entwickelung der Störungsfunktion ableiten kann. Astronomical Papers. Vol. III. Part. I.

lässt sich doch immer der Werth der Integrale mit Anwendung von Interpolationsmethoden beliebig genau finden. Wir nehmen an, dass, für einen bestimmten Werth von ψ, $\Phi_n(\psi)$ nach der Formel (1*) berechnet ist; in (2), unter der Form

$$\Phi_n(\psi)e^{-im\psi} = a_m^{(n)} + a_{m+1}^{(n)}e^{i\psi} + a_{m+2}^{(n)}e^{2i\psi} + \ldots + a_{m-1}^{(n)}e^{-i\psi} + a_{m-2}^{(n)}e^{2i\psi} + \ldots$$

geschrieben, setzen wir successive statt $e^{i\psi}$ die p:ten Wurzeln der Einheit, d. h. 0, $\frac{2\pi}{p}$, $2\cdot\frac{2\pi}{p}$, $\ldots (p-1)\frac{2\pi}{p}$ statt ψ und addiren die Resultate, dann ist

$$\sum e^{ri\psi} = 0$$

wenn nicht r eine Vielfache von p ist, mithin

$$\frac{1}{p}\mathfrak{S}\Phi_n(\psi)e^{-im\psi} = a_m^{(n)} + a_{m+p}^{(n)} + a_{m+2p}^{(n)} + \ldots + a_{m-p}^{(n)} + a_{m-2p}^{(n)} + \ldots$$

Wenn der Fehler in $a_m^{(n)}$ unter der Grenze g liegen muss, so können wir mithin $a_m^{(n)}$ aus der Formel

$$a_m^{(n)} = \frac{1}{p}\mathfrak{S}\Phi_n(\psi_k)e^{-im\psi} \quad (k = 1, 2, \ldots p.) \tag{3}$$

berechnen, wenn nur die willkührliche Zahl p so gewählt ist, dass die Summe

$$s = a_{m+p}^{(n)} + a_{m-2p}^{(n)} + \ldots + a_{m-p}^{(n)} + a_{m-2p}^{(n)} + \ldots$$

kleiner als g ist; wenn wir aber voraussetzen, dass die Reihe (2) ziemlich rasch konvergirt, und zudem p immer grösser als m annehmen, so kann man die Summe s auf ihr grösstes Glied reduciren, und also p aus der Bedingung

$$a_{m-p}^{(n)} < g \tag{4}$$

bestimmen, was auch durch die Ungleichheit

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi, \psi)e^{-i[n\varphi + (m-p)\psi]}d\varphi\, d\psi < g$$

ausgedrückt werden kann.

Aus den p verschiedenen Werthen von $\Phi_n(\psi_k)$ können p Koefficienten $a_m^{(n)}$ berechnet werden, wenn man nur dafür sorgt, dass die Bedingung (4) für alle hier in Betracht kommenden Werthe von m erfüllt ist; dieser Umstand ist von Gewicht, da wir später sehen werden, dass bei der Entwickelung der Störungsfunktion φ und ψ so gewählt werden können, dass aus einem einzigen System von Werthen von $\Phi_n(\psi)$ alle Glieder

derselben Ordnung in Bezug auf die Bahnexcentricitäten und Neigungen gleichzeitig berechnet werden können.

2. Wir haben gesehen, dass die Entwickelung der Störungsfunktion im Wesentlichen von der Entwickelung der negativen ungeraden Potenzen des Abstandes zwischen den beiden Planeten abhängig ist; wir werden uns daher vor allem mit dieser Entwickelung beschäftigen. Wenn r den Radius vector des gestörten, r' den des störenden Körpers bezeichnet, und H der Winkel zwischen beiden, so ist zunächst der Abstand Δ durch die Formel

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H$$

gegeben; $\cos H$ drücken wir zuerst durch die wahre Anomalie der Planeten aus

$$\cos H = \cos(f + \Pi)\cos(f' + \Pi') + \sin(f + \Pi)\sin(f' + \Pi')\cos I$$

wo die Bedeutung von Π, Π' und I die gewöhnliche ist; diese Formel giebt, wenn man $\cos(f + \pi)$ etc. entwickelt und die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} A' &= \cos\Pi\cos\Pi' + \sin\Pi\sin\Pi'\cos I \\ B' &= -\cos\Pi\sin\Pi' + \sin\Pi\cos\Pi'\cos I \\ C' &= \sin\Pi\cos\Pi' - \cos\Pi\sin\Pi'\cos I \\ D' &= \sin\Pi\sin\Pi' + \cos\Pi\cos\Pi'\cos I \end{aligned}$$

benutzt

$$\cos H = A'\cos f\cos f' + B'\cos f\sin f' - C'\sin f\cos f' + D'\sin f\sin f'.$$

Mittelst der bekannten elliptischen Formeln

$$\frac{r}{a}\cos f = \cos\varepsilon - e$$

$$\frac{r}{a}\sin f = \cos\varphi\sin\varepsilon$$

führen wir hier die excentrische Anomalie ein und bekommen dann

$$\begin{aligned} \frac{r}{a}\cdot\frac{r'}{a'}\cos H = {} & Aee' - Ae'\cos\varepsilon - Ae\cos\varepsilon' - Be\sin\varepsilon' + Ce'\sin\varepsilon + A\cos\varepsilon\cos\varepsilon' \\ & + B\cos\varepsilon\sin\varepsilon' + C\sin\varepsilon\cos\varepsilon' + D\sin\varepsilon\sin\varepsilon', \end{aligned}$$

wo wir der Kürze wegen gesetzt haben

$$A' = A\,,\quad B'\cos\varphi' = B\,,\quad C'\cos\varphi' = C\,,\quad D'\cos\varphi\cos\varphi' = D\,.$$

Wir erhalten dann für den Abstand den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = {} & 1 + \alpha^2 + \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 e'^2 - 2\alpha Aee' \\ & + (-2e + 2\alpha e'A)\cos\varepsilon - 2\alpha e'C\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon + \\ & + (-2\alpha^2 e' + 2\alpha eA)\cos\varepsilon' + 2\alpha eB\sin\varepsilon' + \tfrac{1}{2}\alpha^2 e'^2\cos 2\varepsilon' - \\ & - 2\alpha[A\cos\varepsilon\cos\varepsilon' + B\cos\varepsilon\sin\varepsilon' - C\sin\varepsilon\sin\varepsilon' + D\sin\varepsilon\sin\varepsilon'], \end{aligned} \tag{5}$$

wo $\alpha = \frac{a'}{a}$ und e, e' die Bahnexcentricitäten bedeuten.

3. Die Form (5) werden wir als Ausgangsformel bei der Entwickelung der negativen Potenzen von Δ wählen, wobei übrigens die Formeln (1) und (2) zur Anwendung kommen, in dem wir zuerst den Fall betrachten, wo

$$\varphi = \varepsilon' , \ \psi = \varepsilon$$

gesetzt werden. Wir gelangen dann zu den Methoden, die CAUCHY und HANSEN für die Entwickelung der Störungsfunktion aufgestellt haben [1]), und wir werden dieselben hier kurz aus einander setzen, um zu zeigen, wie die Rechnungen nach denselben am einfachsten ausgeführt werden können. Wir schreiben also den Ausdruck (5) für $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ in die folgende Form um

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = D - \gamma_1 \cos \varepsilon' - \beta_0' \sin \varepsilon' + \tfrac{1}{2}\alpha^2 e'^2 \cos 2\varepsilon' ,$$

wo D, γ_1 und β_0' Funktionen nur von ε sind. Von dieser Form ausgehend wird die Entwickelung der negativen Potenzen von Δ zwar ohne Schwierigkeit ausgeführt, in den meisten Fällen ist aber eine andere Verfahrungsweise vorzuziehen. Setzen wir

$$\gamma_1 = f \cos F$$
$$\beta_0' = f \sin F$$

so dass

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = D - f \cos (F - \varepsilon') + \tfrac{1}{2}\alpha^2 e'^2 \cos 2\varepsilon'$$

so wird

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^s = \left[D - f \cos (F - \varepsilon') + \tfrac{1}{2}\alpha^2 e'^2 \cos 2\varepsilon'\right]^{-\frac{s}{2}}$$

Da e' hier sehr klein ist, sieht man sofort, dass es vortheilhaft ist nach den Potenzen des letzten Gliedes zu entwickeln; also

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^s = \frac{1}{[D - f \cos (F - \varepsilon')]^{\frac{s}{2}}} - \frac{s}{4} \frac{\alpha^2 e'^2 \cos 2\varepsilon'}{[D - f \cos (F - \varepsilon')]^{\frac{s+2}{2}}} +$$
$$+ \frac{s \cdot (s+2)}{16} \frac{\alpha^4 e'^4 \cos^2 2\varepsilon'}{[D - f \cos (F - \varepsilon')]^{\frac{s+4}{2}}} + \ldots$$

wo man im Allgemeinen nur die zwei ersten Glieder zu berücksichtigen braucht; für die Jupiterstörungen beträgt das zweite Glied (für $s = 1$) nur einige Zehntel einer Bogensekunde, sein Maximum ist

$$\frac{\alpha^2 e'^2}{4 \sin 1'' [\alpha (1 - e') - 1 - e]^3} .$$

[1]) CAUCHY hat seine Methode in einer schönen Reihe von Abhandlungen in »*Comptes Rendus*» Tom. XIX und XX dargestellt; dieselbe ist weiter entwickelt von PUISEUX: »*Sur les inégalités à longues périodes du mouvement des Planètes*» und BOURGET: »*Mémoire sur le dévelopement de la fonction perturbatrice*» in *Annales de l'Observatoire de Paris.* Tome VII.

Es handelt sich also jetzt nur um die Entwickelung von Funktionen von der Form

$$[D - f\cos(F - \varepsilon')]^{-s/2}$$

und zwar ist es bei der Berechnung der Störungen erster Ordnung nur nöthig die Fälle $s = 1$ und $s = 3$ zu berücksichtigen.

Indem wir mit k_s eine nur von s abhängige Constante bezeichnen, setzen wir jetzt

$$k_s[D - f\cos(F - \varepsilon')]^{-s/2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n^{(s)} \cos nV \tag{6}$$

$$V = F - \varepsilon',$$

wo für die Koefficienten β ohne Schwierigkeit Rekursionsformeln der folgenden Form aufgestellt werden können

$$\beta_{n+2}^{(s)} = b_n \beta_{n+1}^{(s)} + c_n \beta_n^{(s)}$$

$$\beta_{(0)}^{(s+2)} = d_n \beta_0^{(s)} + g_n \beta_1^{(s)}$$

$$\beta_1^{(s+2)} = h_n \beta_0^{(s)} + l_n \beta_1^{(s)},$$

wodurch die Berechnung dieser Koefficienten nur von den Werthen von $\beta_0^{(1)}$ und $\beta_1^{(1)}$ abhängig wird (b_n, c_n etc. hängen in bekannter Weise von n ab); man braucht in der That nur $\beta_0^{(1)}$ zu berechnen, was keine Schwierigkeit darbietet. Nach (6) ist

$$\beta_0^{(1)} = \frac{k_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dV}{\sqrt{D - f\cos V}}$$

$$= \frac{k_1}{2\pi} \sqrt{\frac{1+\vartheta^2}{D}} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dV}{\sqrt{1+\vartheta^2 - 2\vartheta\cos V}}$$

wo wir

$$\frac{f}{D} = \frac{2\vartheta}{1+\vartheta^2} = \sin\theta$$

gesetzt haben. $\beta_0^{(1)}$ ist also ein elliptisches Integral erster Gattung; seine Berechnung geschieht vielleicht am einfachsten nach einer von NEWCOMB benutzten Methode: wenn wir mit $M(a, b)$ das Gaussische aritmetico-geometrische Mittel bezeichnen, so wird erstens

$$\beta_0^{(1)} = \sqrt{\frac{1+\vartheta^2}{D}} \frac{k_1}{M(1-\vartheta, 1+\vartheta)}.$$

Wenn wir die LANDENSCHE Transformation benutzen, ist aber

$$M(a, b) = M(\tfrac{1}{2}(a+b), \sqrt{ab}),$$

und wenn wir diese Formel zwei Mal anwenden und θ statt ϑ einführen, so wird also

$$\beta_0^{(1)} = \sqrt{1+\delta^2}\cdot\frac{k_1}{M(\sqrt{\cos\theta},\ \cos^2\tfrac{1}{2}\theta)} = \frac{\tfrac{1}{2}\pi k_1}{\sqrt{D}\cos^2\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{\cos\theta}}, \tag{7}$$

wo $\log N$, wenn $\delta < 0.75$, erst in der sechsten Decimale sich von $\log 2$ unterscheidet; derselbe ist von NEWCOMB tabulirt worden. [1])

4. Zwar lassen sich nun die β-Koefficienten nach dieser Methode sehr schnell berechnen, wenn man die von HANSEN mittelst der Rekursionsformel

$$\beta_{n+2}^{(s)} - b_n\beta_{n+1}^{(s)} - c_n\beta_n^{(s)} = 0.$$

erhaltenen Kettenbruchs-entwickelungen benutzt. Es giebt aber ein noch bequemeres Mittel, diese Koefficienten zu erhalten; man braucht nämlich nur $\beta_n^{(s)}$ unter der Form

$$\beta_n^{(s)} = \frac{k_s}{2\pi}\left[\frac{1+\delta^2}{D}\right]^{s/2}\int_0^{+\pi}\frac{\cos nV\,dV}{[1+\delta^2-2\delta\cos V]^{s/2}}$$

zu schreiben um sogleich zu finden, dass, abgesehen von einem konstanten Faktor die Koefficienten β nichts anders sind als die aus *Mécanique Céleste* bekannten Koefficienten, die durch die Reihe

$$[1-2\delta\cos\varphi+\delta^2]^{-s} = \tfrac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\varphi + b_s^{(2)}\cos 2\varphi + \ldots$$

definirt sind. Eine Vergleichung zwischen dieser Reihe und (6) giebt in der That

$$\beta_n^{(s)} = \frac{k_s}{2\cos^s\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{D^s}}\cdot b_{s/2}^{(n)} \tag{8}$$

Für diese Koefficienten $b_{s/2}^{(n)}$ hat RUNKLE in »*Smithsonian Contributions to knowledge Vol. IX*» [2]) eine ziemlich ausführliche Tafel gegeben; dieselbe fasst zwar nur die Fälle $s=1$, $s=3$ um, und die $\beta_n^{(5)}$ müssen desswegen besonders berechnet werden, welche Rechnung aber sehr bequem nach den gewöhnlichen Hansenschen Formeln ausgeführt werden kann. [3]) Da die Runkleschen Tafeln nicht zu diesem Zweck aufgestellt sind, kann man auch nicht erwarten, dass dieselben die in jeder Hinsicht möglichst grösste Bequemlichkeit hier gewähren können; es würde daher für die Astronomie von grossem Nutzen sein, diese Tafeln zu erweitern und $\beta_n^{(s)}$ unmittelbar in Tafeln zu bringen, was keine Schwierigkeit darbietet, da der Faktor $\cos^{-s}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{D^{-s}}$, mit welchem man die Runkelschen Koefficienten multipliciren muss, um zu den Hansenschen zu übergehen, sehr nahe konstant ist. Schon mit Anwendung der Tafeln in ihrer jetzigen Form geschieht aber die Entwickelung der Störungsfunktion viel schneller, als wenn man ohne Anwendung derselben die Hansensche Methode benutzt.

[1]) NEWCOMB: *Development of the perturbative function* p. 69. Astronomical Papers vol. III Part. I.
[2]) *New Tables for determining the values of the coefficients in the perturbative function of planetary motion, which depend upon the ratio of the mean distances by* JOH. D. RUNKLE.
[3]) »*Auseinandersetzung etc.*» p. 157.

5. Wir haben also gesehen, dass die Cauchy-Hansensche Methode zur Entwickelung der Störungsfunktion unmittelbar aus (2) erfolgt, wenn man

$$f(\varphi, \psi) = \frac{1}{J}$$

$$\varphi = \varepsilon', \psi = \varepsilon$$

setzt, was als eine zweckmässige Wahl betrachtet werden kann, da J nach (6) wie eine sehr einfache Funktion dieser beiden Veränderlichen dargestellt ist. Dass diese Bestimmung von φ und ψ jedoch nicht immer die beste ist, werden wir sogleich ersehen. Mit Anwendung der Formel (1) erhält man zuerst die Entwickelung

$$\begin{aligned}\frac{1}{J_0} = C_0(\psi_0) + C_1(\psi_0)\cos\varphi + C_2(\psi_0)\cos 2\varphi + \ldots \\ + S_1(\psi_0)\sin\varphi + S_2(\psi)\sin 2\varphi + \ldots,\end{aligned}$$

wo wir, um die Integrale (1*), welche die Koefficienten C_0, C_1 etc. darstellen, berechnen zu können, für ψ einen gewissen numerischen Werth angenommen haben; wenn successive gesetzt wird

$$\psi = 0, \frac{2\pi}{p}, 2\cdot\frac{2\pi}{p}, \ldots (p-1)\cdot\frac{2\pi}{p},$$

erhalten wir also für jeden Koefficienten C und S ein System von p Werthen, aus welchen wir diese Koefficienten als Funktion von ψ darstellen können, d. h. $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ etc. in den Entwickelungen

$$\begin{aligned}C_0(\psi) &= C^{(0)}_{c.0} + C^{(0)}_{c.1}\cos\psi + C^{(0)}_{c.2}\cos 2\psi + \ldots + S^{(0)}_{c.1}\sin\psi + S^{(0)}_{c.2}\sin 2\psi + \ldots \\ C_1(\psi) &= C^{(1)}_{c.0} + C^{(1)}_{c.1}\cos\psi + C^{(1)}_{c.2}\cos 2\psi + \ldots + S^{(1)}_{c.1}\sin\psi + S^{(1)}_{c.2}\sin 2\psi + \ldots \\ S_1(\psi) &= C^{(1)}_{s.0} + C^{(1)}_{s.1}\cos\psi + C^{(1)}_{s.2}\cos 2\psi + \ldots + S^{(1)}_{s.1}\sin\psi + S^{(1)}_{s.2}\sin 2\psi + \ldots \\ &\ldots\end{aligned}$$

bestimmen können. Wäre es nun möglich durch eine passende Wahl von ψ und φ zu bewirken, dass alle Glieder in der Störungsfunktion, die in Bezug auf die Bahnexcentricitäten und die gegenseitige Neigung von der Ordnung *null* sind, in $C_0(\psi)$ enthalten wären, alle Glieder von der ersten Ordnung in $C_1(\psi)$ und $S_1(\psi)$ u. s. f., so würde man in der Entwickelung von den negativen Potenzen der Entfernung nach den Vielfachen von φ nur eine sehr kleine Zahl von Gliedern mitzunehmen brauchen; eine solche Wahl ist aber möglich. Wir erinnern uns nämlich eines bekannten Teorems, die Entwickelung der Störungsfunktion nach den Vielfachen der mittleren Anomalie betreffend: dass, wenn g und g' die mittlere Anomalie des gestörten und des störenden Körpers bezeichnet und $R =$ die Störungsfunktion

$$(\Lambda) \qquad R = \sum\sum P^{i,j}\, e^{\sqrt{-1}(ig - jg')},$$

so ist $P^{i,j}$ in Bezug auf die Bahnexcentricitäten und die gegenseitige Neigung von der Ordnung $i - j$. Man sieht augenblicklich ein, dass dieses Teorem unverändert gilt, wenn

man y und y' gegen zwei neue Veränderliche vertauscht, die sich von jenen durch Glieder unterscheiden, die demselben Gesetze (A) folgen, d. h. wenn man z. B. die Entwickelung nach den Vielfachen der wahren oder der excentrischen Anomalie betrachtet; schreibt man also (das obige Teorem wird unverändert, wenn man R gegen $\frac{a}{\Delta}$ vertauscht)

$$\begin{aligned}\frac{a}{\Delta} = \quad & c^{(0)}_{c.0} + c^{(0)}_{c.1}\cos(\varepsilon-\varepsilon') + c^{(0)}_{c.2}\cos 2(\varepsilon-\varepsilon') + \ldots \\ & + s^{(0)}_{c.1}\sin(\varepsilon-\varepsilon') + s^{(0)}_{c.2}\sin 2(\varepsilon-\varepsilon') + \ldots \\ & + \left[\begin{array}{l} c^{(1)}_{c.0} + c^{(1)}_{c.1}\cos(\varepsilon-\varepsilon') + c^{(1)}_{c.2}\cos 2(\varepsilon-\varepsilon') + \ldots \\ \quad + s^{(1)}_{c.1}\sin(\varepsilon-\varepsilon') + s^{(1)}_{c.2}\sin 2(\varepsilon-\varepsilon') + \ldots \end{array}\right]\cos\varepsilon' + \\ & + \left[\begin{array}{l} c^{(1)}_{s.0} + c^{(1)}_{s.1}\cos(\varepsilon-\varepsilon') + c^{(1)}_{s.2}\cos 2(\varepsilon-\varepsilon') + \ldots \\ \quad + s^{(1)}_{s.1}\sin(\varepsilon-\varepsilon') + s^{(1)}_{s.2}\sin 2(\varepsilon-\varepsilon') + \ldots \end{array}\right]\sin\varepsilon' + \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

so sind alle Koefficienten c und s, die denselben oberen Index haben, von derselben Ordnung in Bezug auf die Excentricität und die Neigung, mithin alle in der ersten Reihe von der nullten Ordnung $u.s.f.$

6. Stellen wir nun diese Resultate mit den früheren Untersuchungen zusammen, so zeigt es sich leicht, dass man in (1)

$$\begin{aligned}\psi &= \varepsilon - \varepsilon' \\ \varphi &= \varepsilon' \text{ oder } \varepsilon\end{aligned}$$

setzen muss, um die Entwickelung von $\frac{a}{\Delta}$ auf die kleinste Zahl von Gliedern zu bringen. Es ist dabei gleichgültig ob man $\varphi = \varepsilon$ oder $\varphi = \varepsilon'$ setzt. Wir werden die letztere Wahl treffen. Wir haben also nur zunächst Δ als eine Funktion von $\varepsilon' - \varepsilon$ und ε' darzustellen. Demnach haben wir

$$\begin{aligned}\cos\varepsilon &= \cos(\varepsilon-\varepsilon')\cos\varepsilon' - \sin(\varepsilon-\varepsilon')\sin\varepsilon' \\ \sin\varepsilon &= \sin(\varepsilon-\varepsilon')\cos\varepsilon' + \cos(\varepsilon-\varepsilon')\sin\varepsilon' \\ \cos 2\varepsilon &= \cos 2(\varepsilon-\varepsilon')\cos 2\varepsilon' - \sin 2(\varepsilon-\varepsilon')\sin 2\varepsilon' \\ 2\cos\varepsilon\cos\varepsilon' &= \cos(\varepsilon-\varepsilon')\cos 2\varepsilon' - \sin(\varepsilon-\varepsilon')\sin 2\varepsilon' + \cos(\varepsilon-\varepsilon') \\ 2\cos\varepsilon\sin\varepsilon' &= \sin(\varepsilon-\varepsilon')\cos 2\varepsilon' + \cos(\varepsilon-\varepsilon')\sin 2\varepsilon' - \sin(\varepsilon-\varepsilon') \\ 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon' &= \sin(\varepsilon-\varepsilon')\cos 2\varepsilon' + \cos(\varepsilon-\varepsilon')\sin 2\varepsilon' + \sin(\varepsilon-\varepsilon') \\ 2\sin\varepsilon\sin\varepsilon' &= -\cos(\varepsilon-\varepsilon')\cos 2\varepsilon' + \sin(\varepsilon-\varepsilon')\sin 2\varepsilon' + \cos(\varepsilon-\varepsilon').\end{aligned}$$

Dann nimmt die Formel (5) folgende Form an

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = 1 &+ \alpha^2 + \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{4}\alpha^2e'^2 - 2\alpha Aee' + \alpha(A+D)\cos(\varepsilon-\varepsilon') - \alpha(B+C)\sin(\varepsilon-\varepsilon') + \\ &+ [-2\alpha^2e' + 2\alpha eA - (e-\alpha e'A)2\cos(\varepsilon-\varepsilon') - \alpha e'C\,.\,2\sin(\varepsilon-\varepsilon')]\cos\varepsilon' + \\ &+ [2\alpha eB + (e-\alpha e'A)2\sin(\varepsilon-\varepsilon') - \alpha e'C\,.\,2\cos(\varepsilon-\varepsilon')]\sin\varepsilon' + \\ &+ [\tfrac{1}{4}\alpha^2e'^2 + \tfrac{1}{2}e^2\cos 2(\varepsilon-\varepsilon') + \alpha(A-D)\cos(\varepsilon-\varepsilon') + \alpha(B-C)\sin(\varepsilon-\varepsilon')]\cos 2\varepsilon' + \\ &+ [\tfrac{1}{4}\alpha^2e'^2 - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2(\varepsilon-\varepsilon') - \alpha(A-D)\sin(\varepsilon-\varepsilon') + \alpha(B-C)\cos(\varepsilon-\varepsilon')]\sin 2\varepsilon'.\end{aligned}$$

Um hier die Grösse der verschiedenen Glieder beurtheilen zu können, ist es nothwendig einige Zusammenstellungen von A, B etc. zu untersuchen. Zuerst bemerken wir, dass bis auf Grössen zweiter Ordnung in Bezug auf die Excentricität A und A', B und B' etc. zusammenfallen; da es sich nur um Untersuchungen über die genäherte Grösse handelt, so können wir mithin A, B' etc. statt A, B etc. in Betracht ziehen. Es folgt aus der Definition dieser Grössen p. 6 dass

$$\begin{aligned} A' + D' &= \cos(\pi - \pi') \,.\, 2\cos^2\tfrac{1}{2}I \\ A' - D' &= \cos(\pi + \pi') \,.\, 2\sin^2\tfrac{1}{2}I \\ B' + C' &= \sin(\pi - \pi') \,.\, 2\cos^2\tfrac{1}{2}I \\ B' - C' &= -\sin(\pi + \pi') \,.\, 2\sin^2\tfrac{1}{2}I \end{aligned}$$

Aus diesen Zusammenstellungen folgen jetzt einige intressante Resultate. Mit Anwendung der Bezeichnungen

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \Gamma_0 = 1+\alpha^2+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\alpha^2e'^2-2\alpha ee'A+\alpha(A+D)\cos(\varepsilon-\varepsilon')-\alpha(B+C)\sin(\varepsilon-\varepsilon') \\ -\Gamma_1\cos M = -\alpha^2e'+\alpha eA-(e-\alpha e'A)\cos(\varepsilon-\varepsilon')-\alpha eC\sin(\varepsilon-\varepsilon') \\ -\Gamma_1\sin M = \alpha eB+(e-\alpha e'A)\sin(\varepsilon-\varepsilon')-\alpha e'C\cos(\varepsilon-\varepsilon') \\ \Gamma_2\cos 2N = \frac{1}{2}\alpha^2e'^2+\frac{1}{2}e^2\cos 2(\varepsilon-\varepsilon')+\alpha(A-D)\cos(\varepsilon-\varepsilon')+\alpha(B-C)\sin(\varepsilon-\varepsilon') \\ \Gamma_2\sin 2N = \frac{1}{2}\alpha^2e'^2-\frac{1}{2}e^2\sin 2(\varepsilon-\varepsilon')-\alpha(A-D)\sin(\varepsilon-\varepsilon')+\alpha(B-C)\cos(\varepsilon-\varepsilon') \end{array}\right.$$

wird

$$(10)\qquad \left(\frac{I}{a}\right)^2 = \Gamma_0 - 2\Gamma_1\cos(\varepsilon'-M)+\Gamma_2\cos 2(\varepsilon'-N)\,.$$

Aus (6) sieht man unmittelbar ein, dass Γ_1 von der Ordnung der Excentricitäten ist: mittelst der schon erhaltenen Werthe von $A'+D'$, etc. bekommen wir ferner die folgenden genäherten Werthe von Γ_0 und Γ_2

$$(9^*)\quad \left\{\begin{array}{l} \Gamma_0 = 1+\alpha^2+2\alpha\cos(\varepsilon-\varepsilon'+\pi-\pi') \\ \Gamma_2\cos 2N = \frac{1}{2}\alpha^2e'^2+\frac{1}{2}e^2\cos 2(\varepsilon-\varepsilon)+2\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}I\cos(\varepsilon-\varepsilon'+\pi+\pi') \\ \Gamma_2\sin 2N = \frac{1}{2}\alpha^2e'^2-\frac{1}{2}e^2\sin 2(\varepsilon-\varepsilon')-2\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}I\sin(\varepsilon-\varepsilon'+\pi+\pi')\,. \end{array}\right.$$

Γ_0 ist also von der nullten Ordnung, Γ_2 von der Ordnung des Quadrates der Bahnexcentricitäten und der gegenseitigen Neigung. Diese Eigenschaft ist von Gewicht, da dieselbe uns erlaubt, eine Transformation zu benutzen, welche von GAUSS bei Gelegenheit einer Berechnung der sekularen Störungen angewandt wurde.

7. Wir werden nun die Entwickelung der negativen Potenzen der Entfernung in der Form betrachten, die sich aus der vorhergehenden Untersuchung als nöthig erwies. Erstens bemerken wir, dass es hinreichend ist die Entwickelung von

$$\left(\frac{a}{I}\right)^n$$

zu untersuchen, da die erforderlichen Differentialquotienten (wenn von den Störungen erster Ordnung die Rede ist) sich durch diese Potenz der Entfernung ausdrücken

lassen[1]). Wir wählen also für $\varepsilon - \varepsilon'$ einen gewissen konstanten Werth und stellen uns die Aufgabe, die Koefficienten in der Entwickelung

$$(10) \qquad [\Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos(\varepsilon' - M) + \Gamma_2 \cos 2(\varepsilon - N)]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cos n\varepsilon' + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \sin n\varepsilon'$$

zu bestimmen, wo

$$(11) \qquad \begin{cases} C_n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \dfrac{\cos n\varepsilon' d\varepsilon'}{[\Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos(\varepsilon' - M) + \Gamma_2 \cos 2(\varepsilon' - N)]^{\frac{1}{2}}} \\ S_n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \dfrac{\sin n\varepsilon' d\varepsilon'}{[\Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos(\varepsilon' - M) + \Gamma_2 \cos 2(\varepsilon' - N)]^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

Um diese Integrale zu berechnen, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen: entweder entwickelt man den Nenner nach Potenzen von Γ_2, was immer möglich ist, da wie wir schon gesehen haben Γ_2 von der Ordnung des Quadrats der Excentricität ist; oder bringt man die Integrale auf die Normalform der elliptischen Integrale, da man sogleich sieht, dass sich dieselben auf diese Form reduciren lassen. Das erstere Verfahren, das bei der Hansenschen Form der Entwickelung von so glücklichem Erfolg ist, erscheint aber hier nicht so vortheilhaft, da Γ_2 auch das Quadrat der Excentricität des *gestörten* Körpers enthält, welche im Allgemeinen ziemlich gross ist; dagegen wird die zweite Methode sich hier als sehr passend erweisen[2]).

Wie man Integrale von der Form (11) auf die Normalform bringen kann, hat Gauss mit seiner gewöhnlichen Eleganz in derselben Abhandlung[3]) nachgewiesen, in welcher zum ersten Mal das s. g. aritmetisch-geometrische Mittel in die Analyse eingeführt wird. Die Untersuchungen von Gauss, die das Berechnen der secularen Störungen beabsichtigten, sind später von Hill besonders aus dem Gesichtspunkt numerischer Rechnung fortgesetzt worden, und zwar hat er für die Rechnung sehr einfache und praktische Methoden angegeben und dieselbe durch Hülfstafeln erleichtert[4]). Solche Tafeln findet man auch in einer späteren Arbeit von M. O. C. Callandreau, welcher überdiess gezeigt hat, wie man alle Glieder, die von der Lage des gestörten Körpers allein abhängen (d. h. alle Glieder von der Form $a_n \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\varepsilon$), berechnen kann[5]). Da diese Tafeln nur beabsichtigen, das Berechnen der sekularen Störungen zu erleichtern, so kommen dieselben in der jetzigen Untersuchung

[1]) Vergleich »*Aneinandersetzung* etc.» Art. 30.

[2]) Wenn es nöthig wird in (10) mehr als 3 Glieder mitzunehmen (n grösser als 2), so ist es vielleicht bequemer eine andere Methode anzuwenden, die der von Cauchy (Comptes Rendus Tome XX) analog ist.

[3]) *Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datæ exerceret planeta, si ejus massa per totam orbitam ratione temporis quo singulæ partes describuntur uniformiter esset dispertita.* (Werke. Bd. III. p. 331.)

[4]) *On* Gauss *Method of computing secular perturbations, with an application to the action of Venus on Mercur by* George W. Hill (Astronomical Papers Vol. I).

[5]) *Calcul des variations séculaires des éléments des orbites par* M. O. C. Callandreau (Annales de l'Observatoire de Paris Vol. XVIII).

zwar zu keiner Anwendung, dagegen werden wir gelegentlich viele Bemerkungen und Untersuchungen in den besprochenen Abhandlungen uns zu Nutze machen[1]).

Zunächst werden wir die Form von $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ etwas verändern, indem wir setzen

$$\begin{cases} \varkappa_0 = \Gamma_0 - \Gamma_2 \cos 2N \\ \varkappa_1 = \Gamma_1 \cos M, \quad \varkappa_2 = \Gamma_2 \cos 2N \\ \lambda_1 = \Gamma_1 \sin M, \quad \lambda_2 = \Gamma_2 \sin 2N \end{cases} \tag{12}$$

mithin

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \varkappa_0 - 2\varkappa_1 \cos\varepsilon' - 2\lambda_1 \sin\varepsilon' + 2\varkappa_2 \cos^2\varepsilon' + 2\lambda_2 \cos\varepsilon' \sin\varepsilon' . \tag{13}$$

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 \cos n\varepsilon' d\varepsilon' \\ S_n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 \sin n\varepsilon' d\varepsilon' \end{cases} \tag{14}$$

und führen dann mit GAUSS statt ε' eine neue Veränderliche T durch die Gleichungen

$$\begin{cases} H\cos\varepsilon' = \alpha + \alpha' \sin T + \alpha'' \cos T \\ H\sin\varepsilon' = \beta + \beta' \sin T + \beta'' \cos T \\ H = \gamma + \gamma' \sin T + \gamma'' \cos T \end{cases} \tag{15}$$

ein (wenn man Exponentialgrössen einführt, so sieht man dass diese Substitution der Transformation zweiten Grades entspricht). Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Koefficienten α α' etc. so zu bestimmen, dass, nach Einführung von T statt ε', $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ die folgende Form annimmt

$$H^2\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = L - L' \sin^2 T - L'' \cos^2 T. \tag{16}$$

Es wird sich zeigen, dass L, L' und L'' als die Wurzeln einer Gleichung dritten Grades dargestellt werden können, wo die Koefficienten rationale Funktionen von den $\varkappa$ und den λ sind; um die L zu berechnen braucht man desshalb die Werthe von α, α' etc. nicht zu kennen.

Die Koefficienten α, α etc. sind einigen Bedingungen unterworfen, die von dem Transformationsproblem unabhängig sind. In der That folgt aus (15) die identische Gleichung

$$[\alpha + \alpha' \sin T + \alpha'' \cos T]^2 + [\beta + \beta' \sin T + \beta'' \cos T]^2 - [\gamma + \gamma' \sin T + \gamma'' \cos T]^2 = 0 ,$$

wovon die folgenden 6 Bedingungsgleichungen hervorgehen[2])

[1]) In Comptes Rendus Aug. 1886 hat HALPHEN eine Methode gegeben, die Integrale ohne Anwendung der Gaussischen Substitution auf die Normalform zu bringen.

[2]) »*Determinatio attractionis . . .*» p. 335.

$$(16^*)\qquad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = -1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 - \gamma'^2 = 1 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 - \gamma''^2 = 1 \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' - \gamma\gamma' = 0 \\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' - \gamma\gamma'' = 0 \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' - \gamma'\gamma'' = 0 \end{cases}$$

und mit Hülfe derselben wird erhalten

$$(17)\qquad \begin{cases} -1 = \alpha H\cos\varepsilon' + \beta H\sin\varepsilon' - \gamma H \\ \sin T = \alpha' H\cos\varepsilon' + \beta' H\sin\varepsilon' - \gamma' H \\ \cos T = \alpha'' H\cos\varepsilon' + \beta'' H\sin\varepsilon' - \gamma'' H\,. \end{cases}$$

Diese Werthe von $\sin T$ und $\cos T$ in (16) ingesetzt, indem wir gleichzeitig statt der linken Seite von (16) die rechte von (13) benutzen, geben uns die noch erforderlichen 6 Gleichungen zur Bestimmung der 12 Grössen α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ''; L, L', L''.

$$(18)\qquad \begin{cases} L\alpha^2 - L'\alpha'^2 - L''\alpha''^2 = 2x_2 + h \\ L\beta^2 - L'\beta'^2 - L''\beta''^2 = h \\ L\gamma^2 - L'\gamma'^2 - L''\gamma''^2 = x_0 - h \\ L\alpha\beta - L'\alpha'\beta' - L''\alpha''\beta'' = \lambda_2 \\ L\alpha\gamma - L'\alpha'\gamma' - L''\alpha''\gamma'' = x_1 \\ L\beta\gamma - L'\beta'\gamma' - L''\beta''\gamma'' = \lambda_1 \end{cases}$$

Die Grösse h in der drei ersten dieser Gleichungen bezeichnet eine Konstante, die beliebig gewählt werden kann: wir könnten zum Beispiel $h = 0$ setzen, werden aber erst später über diese Grösse verfügen. Zur Bestimmung von L, L' und L'' entnehmen wir mit Gauss der Gleichungen (18) die folgenden drei

$$\text{I}\qquad \begin{cases} L\alpha^2 - L'\alpha'^2 - L''\alpha''^2 = 2x + h \\ L\alpha\beta - L'\alpha'\beta' - L''\alpha''\beta'' = \lambda_2 \\ L\alpha\gamma - L'\alpha'\gamma'' - L''\alpha''\beta'' = x_1 \end{cases}$$

ebenso

$$\text{II}\qquad \begin{cases} L\beta^2 - L'\beta'^2 - L''\beta''^2 = h \\ L\beta\alpha - L'\beta'\alpha' - L''\beta''\alpha'' = \lambda_2 \\ L\beta\gamma - L'\beta'\gamma' - L''\beta''\gamma'' = \lambda_1 \end{cases}$$

und

$$\text{III}\qquad \begin{cases} L\gamma^2 - L'\gamma'^2 - L''\gamma''^2 = x_0 - h \\ L\gamma\alpha - L'\gamma'\alpha' - L''\gamma''\alpha'' = x_1 \\ L\gamma\beta - L'\gamma'\beta'' - L''\gamma''\beta'' = \lambda_1 \end{cases}$$

Multipliciren wir jetzt die drei Gleichungen in der ersten Gruppe mit α, β, $-\gamma$, die der zweiten Gruppe mit β, α, $-\gamma$, und endlich die Gleichungen III mit $-\gamma$, α, β, und legen dann die Resultate zusammen, indem wir auf die Bedingungsgleichungen (16*) Rücksicht nehmen, so erfolgt

$$\begin{aligned} -L\alpha &= \alpha(2z_2+h) + \beta\lambda_2 - \gamma z_1 \\ -L\beta &= \alpha\lambda_2 + \beta h - \gamma\lambda_1 \\ -L\gamma &= \alpha z_1 + \beta\lambda_1 - \gamma(z_0-h). \end{aligned}$$

Da die Werthe $\alpha=\beta=\gamma=0$ nicht zulässig sind, so folgt hieraus

$$\begin{vmatrix} L+2z_2+h, & \lambda_2, & -z_1 \\ \lambda_2, & L+h, & -\lambda_1 \\ z_1, & \lambda_1, & L-z_0+h \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn wir auf analoge Weise verfahren, um uns eine Gleichung für L' zu verschaffen, so ergiebt sich für die Bestimmung desselben dieselbe Gleichung wie für L, und ebenso für L''. L, L' und L'' sind also die drei Wurzeln einer und derselben Gleichung dritten Grades

$$\begin{vmatrix} x+2z_2+h, & \lambda_2, & -z_1 \\ \lambda_2, & x+h, & -\lambda_1 \\ z_1, & \lambda_1, & x-z_0+h \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Aus dieser Gleichung wird eigentlich nur $x+h$ bestimmt, wir sehen aber mit Hülfe von (16) dass der Ausdruck für $\left(\frac{J}{a}\right)^2$ unverändert bleibt, wenn L, L', L'' gleichzeitig mit einer Konstante vermehr werden, und wir können daher, wie schon früher bemerkt, willkührlich über h verfügen; es wäre zum Beispiel möglich h so zu bestimmen, dass (19) die Wurzel $x=0$ hatte; und also

$$H^2\left(\frac{J}{a}\right)^2 = L - L''\cos^2 T.$$

Da diese Annahme aber keinen wirklichen Vortheil erbietet, setzen wir einfach $h=0$, und erhalten also für x die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x+2z_2, & \lambda_2, & -z_1 \\ \lambda_2, & x, & -\lambda_1 \\ z_1, & \lambda_1, & x-z_0 \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

oder

$$x(x+2z_2)(x-z_0) + z_1^2 x + \lambda_1^2(x+2z_2) - \lambda_2^2(x-z_0) - 2z_1\lambda_1\lambda_2 = 0. \tag{21}$$

Da man hier verlangt, dass nicht nur $\left(\frac{J}{a}\right)^2$ die Form

$$H^2\left(\frac{J}{a}\right)^2 = L - L'\sin^2 T - L''\cos^2 T$$

annimmt, sondern auch dass für L, L' und L'' reele Werthe herauskommen sollen, so ist es nothwendig zu untersuchen, ob wirklich alle Wurzeln der Gleichung (20) reell sind.

In dem Problem, welches GAUSS in »*Determinatio Attractionis* etc.» behandelte, vereinfachte sich die Gleichung (21), so dass es ihm möglich wurde zu zeigen, dass in diesem Falle wirklich immer reelle Werthe für L, L' und L'' herauskamen. In dem vorliegenden Falle ist dies aber nicht möglich zu beweisen. Eine Veränderung in der angewandten Methode wird jedoch zum Ziele führen.

8. Indem wir zu der Form (11) der zuuntersuchenden Integrale zurückkehren, führen wir daselbst eine neue Veränderliche

$$u = \varepsilon' - N \tag{22}$$

ein; wenn wir noch die Bezeichnungen

$$\left\{\begin{aligned} I_n^{(c)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos nudu}{[\Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos[u - M + N] + \Gamma_2 \cos 2u]^{\frac{1}{2}}} \\ I_n^{(s)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin nudu}{[\Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos[u - M + N] + \Gamma_2 \cos 2u]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right. \tag{23}$$

benutzen, so wird

$$\left\{\begin{aligned} C_n &= \cos nNI_n^{(c)} - \sin nNI_n^{(s)} \\ S_n &= \cos nNI_n^{(s)} + \sin nNI_n^{(c)}. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Dann wenden wir die Gaussische Substitution auf $I_n^{(c)}$ und $I_n^{(s)}$ an. Da nun

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos[u - M + N] + \Gamma_2 \cos 2u$$

ist, so zeigt uns eine Vergleichung mit (13) dass wir hier unsere früheren Resultate unmittelbar benutzen können, wenn wir nur vertauschen

$$\begin{array}{lll} z_0 & \text{gegen} & \Gamma_0 - \Gamma_2 \\ z_1 & \text{»} & \Gamma_1 \cos(M - N) \\ \lambda_1 & \text{»} & \Gamma_1 \sin(M - N) \\ z_2 & \text{»} & \Gamma_2 \\ \lambda_2 & \text{»} & 0; \end{array}$$

wir bekommen also zur Bestimmung der neuen L, L' und L'' statt (20) die neue Gleichung

$$\begin{vmatrix} x + 2\Gamma_2, & 0, & -\Gamma_1 \cos(M - N) \\ 0, & x, & -\Gamma_1 \sin(M - N) \\ \Gamma_1 \cos(M - N), & \Gamma_1 \sin(M - N), & x - \Gamma_0 + \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

oder

$$x(x + 2\Gamma_2)(x - \Gamma_0 + \Gamma_2) + \Gamma_1^2 x + 2\Gamma_1^2 \Gamma_2 \sin^2(M - N) = 0, \tag{25}$$

was man auch unter der Form

$$\frac{\Gamma_1^2 \cos^2(M - N)}{x + 2\Gamma_2} + \frac{\Gamma_1^2 \sin^2(M - N)}{x} + x - \Gamma_0 + \Gamma_2 = 0$$

schreiben kann.

Es hat nun keine Schwierigkeit zu zeigen, dass die Wurzeln der Gleichung (25) wirklich alle *reell* sind, wenigstens unter der Voraussetzung, dass die Excentricitäten der Planetbahnen und ihre gegenseitige Neigung als kleine Grössen zu betrachten sind. Erstens zeigt das Zeichen des letzten Gliedes in (25), dass es immer eine reelle nicht positive Wurzel giebt; um die Grösse derselben wie die der übrigen Wurzeln zu bestimmen, stellen wir folgende Werthe zusammen (P bezeichnet die linke Seite in (25))

Für	$x = -2\Gamma_2$,	ist	$P = -2\Gamma_1^2\Gamma_2 \cos^2(M-N)$,	mithin *negativ*
»	$x = 0$	»	$P = -2\Gamma_1^2\Gamma_2 \sin^2(M-N)$	» *positiv*
»	$x = \frac{1}{2}\Gamma_0$	»	$P =$	*negativ*
»	$x = \Gamma_0 - \Gamma_2$	»	$P =$	*positiv.*

Mithin ist es erwiesen, dass (25) drei reelle Wurzeln hat, von denen eine negativ und ihrem numerischen Betrage nach kleiner als $2\Gamma_2$ ist; von den zwei übrigen, die beide positiv sind, liegt die eine sehr nahe 0, die andere unterscheidet sich wenig von Γ_0.

Es ist kaum nöthig zu erwähnen, dass jetzt

$$\begin{cases} H\cos u = \alpha + \alpha' \sin T + \alpha'' \cos T \\ H\sin u = \beta + \beta' \sin T + \beta'' \cos T \\ H = \gamma + \gamma' \sin T + \gamma'' \cos T \end{cases} \tag{26}$$

9. Aus diesen Gleichungen bekommt man

$$Hdu = \pm dT, \tag{27}$$

und dann

$$\left(\frac{a}{A}\right)^3 \cdot du = H^2\left(\frac{a}{HA}\right)^3 \cdot Hdu = \frac{\pm H^2 \cdot dT}{[L - L'\sin^2 T - L''\cos^2 T]^{3/2}},$$

wo man das Zeichen *plus* nimmt, wenn $\frac{dT}{du}$ positiv ist, und *minus*, wenn dies nicht der Fall ist; in beiden Fällen bekommt man

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} nu \left\{ \left(\frac{a}{A}\right)^3 du = \int_{-\pi}^{+\pi} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} nu \right\} \frac{H^2 dT}{[L - L'\sin^2 T - L''\cos^2 T]^{3/2}},$$

wo wir noch statt $\cos nu$ und $\sin nu$ die Ausdrücke (26) einzusetzen haben. Jetzt ist also

$$I_n^{(c)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos nu H^2 dT}{[L - L'\sin^2 T - L''\cos^2 T]^{3/2}}$$

$$I_n^{(s)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin nu H^2 dT}{[L - L'\sin^2 T - L''\cos^2 T]^{3/2}}.$$

Indem wir die Ausdrücke (26) für $\sin u$ und $\cos u$ berücksichtigen, sehen wir sogleich, dass, wenn $n > 2$, die obigen Integrale im Allgemeinen elliptische Integrale der

dritten Gattung werden; dagegen können wir für $n \leq 2$ die Integrale auf die elliptischen Integrale der zwei ersten Gattungen zurückführen. Da ferner die drei Integrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos T dT}{[L - L' \sin^2 T - L'' \cos^2 T]^{3/2}}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin T dT}{[L - L' \sin^2 T - L'' \cos^2 T]^{3/2}}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin T \cos T dT}{[L - L' \sin^2 T - L'' \cos^2 T]^{3/2}}$$

gleich Null sind, so ist es einleuchtend, dass für $n < 2$ alle Integrale dieselbe Form haben, nämlich

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a \cos^2 T + b \sin^2 T}{[L - L' \sin^2 T - L'' \cos^2 T]^{3/2}} dT .$$

Wenn wir also die Bezeichnungen

$$(28) \quad \begin{cases} P = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos^2 T dT}{[(L - L') \sin^2 T + [L - L''] \cos^2 T]^{3/2}} \\ Q = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2 T dT}{[(L - L') \sin^2 T + (L - L'') \cos^2 T]^{3/2}} \end{cases}$$

einführen, so wird

$$(29) \quad \begin{cases} I_n^{(c)} = \vartheta_n^{(c)} P + \sigma_n^{(c)} Q \\ I_n^{(s)} = \vartheta_n^{(s)} P + \sigma_n^{(s)} Q, \end{cases}$$

und wir brauchen nur die ϑ und σ zu bestimmen.

Aus (26) ergiebt sich zuerst

$$(30) \quad \begin{cases} \vartheta_0^{(c)} = \gamma^2 + \gamma''^2, \quad \sigma_0^{(c)} = \gamma^2 + \gamma''^2 \\ \vartheta_1^{(c)} = \alpha\gamma + \alpha''\gamma'', \quad \sigma_1^{(c)} = \alpha\gamma + \alpha'\gamma' \\ \vartheta_1^{(s)} = \beta\gamma + \beta''\gamma'', \quad \sigma_1^{(s)} = \beta\gamma + \beta'\gamma' \\ \vartheta_2^{(c)} = \alpha^2 + \alpha''^2 - (\beta^2 + \beta''^2), \quad \sigma_2^{(c)} = \alpha^2 + \alpha'^2 - (\beta^2 + \beta''^2) \\ \vartheta_2^{(s)} = 2(\alpha\beta + \alpha''\beta''), \quad \sigma_2^{(s)} = 2(\alpha\beta + \alpha'\beta'). \end{cases}$$

Die Werthe von γ^2, γ'^2 etc., welche man braucht, um die rechten Seiten obiger Gleichungen durch I_0, I_1, I_2, L, L' und L'' auszudrücken, lassen sich aus (18) unter Berück-

sichtigung von (16*) berechnen. Bezeichnen wir mit D das Produkt der Differenzen zwischen den Wurzeln von (24), so wird nach Einführung dieser Werthe

$$
\begin{aligned}
D\delta_0^{(c)} &= L'(2\Gamma_2 + L')(L - L'') - 2L''(2\Gamma_2 + L'')(L - L') + D\\
D\sigma_0^{(c)} &= 2L'(2\Gamma_2 + L')(L - L'') - L''(2\Gamma_2 + L'')(L - L') + D\\
D\delta_1^{(c)} &= \Gamma_1 \cos(M - N)[L'(L - L'') - 2L''(L - L')]\\
D\sigma_1^{(c)} &= \Gamma_1 \cos M - N)[2L'(L - L'') - L''(L - L')]\\
D\delta_1^{(s)} &= \Gamma_1 \sin(M - N)[2\Gamma_2 + L_1)(L - L'') - 2(2\Gamma_2 + L'')(L - L')]\\
D\sigma_1^{(s)} &= \Gamma_1 \sin(M - N)[2(2\Gamma_2 + L')(L - L'') - (2\Gamma_2 + L'')(L - L')\\
D\delta_2^{(c)} &= \left[L''(\Gamma_0 - \Gamma_2 - L') - \Gamma_1^2 \sin^2(M - N)\left(2 + \frac{2\Gamma_2}{L'}\right)\right](L - L'')\\
&\quad + \left[-2L''(\Gamma_0 - \Gamma_2 - L') + 2\Gamma_1^2 \sin^2(M - N)\left(2 + \frac{2\Gamma_2}{L''}\right)\right](L - L')\\
D\sigma_2^{(c)} &= \left[2L'(\Gamma_0 - \Gamma_2 - L') - 2\Gamma_1^2 \sin^2(M - N)\left(2 + \frac{2\Gamma_2}{L'}\right)\right](L - L'')\\
&\quad + \left[L''(\Gamma_0 - \Gamma_2 - L'') + \Gamma_1^2 \sin^2(M - N)\left(2 + \frac{2\Gamma_2}{L'}\right)\right](L - L')\\
D\delta_2^{(s)} &= \Gamma_1^2 \sin 2(M - N)[L - L'' - 2(L - L')]\\
D\sigma_2^{(s)} &= \Gamma_1^2 \sin 2(M - N)[2(L - L'') - (L - L')]\\
D &= (L - L')(L - L'')(L' - L'').
\end{aligned}
$$

Die Entwickelung wird etwas übersichtlicher, wenn man, vermöge der Gleichungen

$$
\alpha = \frac{\Gamma_1 \cos(M - N)}{2\Gamma_2 + L} \cdot \gamma;\ \alpha' = \frac{\Gamma_1 \cos(M - N)}{2\Gamma_2 + L'}\ \gamma';\ \alpha'' = \frac{\Gamma_1 \cos(M - N)}{2\Gamma_2 + L''} \cdot \gamma''
$$

$$
\beta = \frac{\Gamma_1 \sin(M - N)}{L} \cdot \gamma;\ \beta' = \frac{\Gamma_1 \sin(M - N)}{L'} \cdot \gamma';\ \beta'' = \frac{\Gamma_1 \sin(M - N)}{L''} \cdot \gamma''\ ^1),
$$

die man leicht aus (18) ableitet, alle die obigen Koefficienten durch γ^2, γ'^2 und γ''^2 ausdrückt.

Man findet dann

$$
\text{(31)}\qquad
\begin{cases}
\delta_0^{(c)} = \gamma^2 + \gamma''^2; \quad \sigma_0^{(c)} = \gamma^2 + \gamma'^2\\
\delta_1^{(c)} = \Gamma_1 \cos(M - N)\left[\dfrac{\gamma^2}{2\Gamma_2 + L} + \dfrac{\gamma''^2}{2\Gamma_2 + L''}\right]\\
\sigma_1^{(c)} = \Gamma_1 \cos(M - N)\left[\dfrac{\gamma^2}{2\Gamma_2 + L} + \dfrac{\gamma'^2}{2\Gamma_2 + L'}\right]
\end{cases}
$$

[1]) Vergleiche HILL: »*On Gauss Method etc.*» p. 326.

$$
(31)\qquad
\begin{cases}
\vartheta_1^{(s)} = \Gamma_1 \sin(M-N)\left[\dfrac{\gamma^2}{L}+\dfrac{\gamma''^2}{L''}\right] \\
\sigma_1^{(s)} = \Gamma_1 \sin(M-N)\left[\dfrac{\gamma^2}{L_1}+\dfrac{\gamma'^2}{L'}\right] \\
\vartheta_2^{(c)} = \Gamma_1^2 \cos^2(M-N)\left[\dfrac{\gamma^2}{(2\Gamma_2+L)^2}+\dfrac{\gamma''^2}{(2\Gamma_2+L'')^2}\right] \\
\qquad -\Gamma_1^2 \sin^2(M-N)\left[\dfrac{\gamma^2}{L^2}+\dfrac{\gamma''^2}{L''^2}\right]- \\
\sigma_2^{(c)} = \Gamma_1^2 \cos^2(M-N)\left[\dfrac{\gamma^2}{(2\Gamma_2+L)^2}+\dfrac{\gamma'^2}{(2\Gamma_2+L')^2}\right] \\
\qquad -\Gamma_1^2 \sin^2(M-N)\left[\dfrac{\gamma_2}{L^2}+\dfrac{\gamma'^2}{L'^2}\right] \\
\vartheta_2^{(s)} = \Gamma_1^2 \sin 2(M-N)\left[\dfrac{\gamma^2}{L(2\Gamma_2+L)}+\dfrac{\gamma''^2}{L''(2\Gamma_2+L'')}\right] \\
\sigma_2^{(s)} = \Gamma_1^2 \sin 2(M-N)\left[\dfrac{\gamma^2}{L(2\Gamma_2+L)}+\dfrac{\gamma'^2}{L'(2\Gamma_2+L')}\right]
\end{cases}
$$

wo γ^2, γ'^2, γ''^2 durch die Gleichungen

$$
(31^*)\qquad
\begin{cases}
D\gamma'^2 = \quad L'(2\Gamma_2+L')(L-L'') \\
D\gamma''^2 = -L''(2\Gamma_2+L'')(L-L') \\
\gamma^2 = \gamma'+\gamma''^2+1
\end{cases}
$$

bestimmt sind.

10. Nachdem die ϑ und σ berechnet sind, bleibt uns nur übrig die beiden Integrale P und Q (28) zu evaluiren, was vielleicht am schnellsten nach GAUSS' Methode unter Anwendung des aritmetisch-geometrischen Mittels ausgeführt werden kann; gesetzt

$$
\begin{aligned}
m^2 &= L-L' \\
n^2 &= L-L'',
\end{aligned}
$$

so wird

$$
P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos^2 T\,dT}{[m^2\cos^2 T+n^2\sin^2 T]^{3/2}}
$$

$$
Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2 T\,dT}{[m^2\cos^2 T+n^2\sin^2 T]^{3/2}}.
$$

Berechnen wir nun successive

$$
m = \frac{1}{2}(m+n),\quad n' = \sqrt{mn}
$$

$$
m'' = \frac{1}{2}(m'+n'),\quad n'' = \sqrt{m'n'},\ \text{u. s. f.}
$$

dann

$$\lambda^2 = \frac{1}{16}(m^2 - n^2)$$

$$\lambda' = \frac{\lambda^2}{m'},\ \lambda'' = \frac{\lambda'^2}{m''},\ \lambda'''^2 = \frac{\lambda''^2}{m'''} \text{ etc.}$$

$$r = \frac{1}{\lambda^2}[2\lambda'^2 + 4\lambda''^2 + 8\lambda'''^2 + \ldots];$$

und mit μ die Grenze, der sich m, m', m'' etc. [oder n, n', n'' etc.] nähern, d. h. das aritmetisch-geometrische Mittel zwischen m und n, verstehen, so ist[1])

$$P = \frac{1+r}{2m^2\mu};\quad Q = \frac{1-r}{2n^2\mu} \tag{32}$$

Hinsichtlich der Berechnung der Wurzeln der Gleichung dritten Grades (25) ist endlich nur zu bemerken, dass dieselbe immer nach der trigonometrischen Methode, die man gewöhnlich benutzt, wenn alle Wurzeln reell sind, sehr bequem ausgeführt werden kann.

Wenn man nur beabsichtigt, die Störungen erster Ordnung in Bezug auf die Massen zu berechnen, so genügt es im Allgemeinen, die Glieder bis zur zweiten Ordnung inclusive in Bezug auf die Excentricität und die Neigung zu berücksichtigen. Alle für diesen Fall erforderlichen Ausdrücke sind also oben angegeben. Wenn man aber die Störungen noch genauer berechnen will, so sind auch die Fälle zu untersuchen, wo man durch die Gaussische Transformation auf elliptische Integrale *dritter* Gattung geführt wird. Diese Untersuchung müssen wir aber zu einer anderen Gelegenheit aufschieben.

Die Differentialgleichungen der Bewegung.

11. Da ausser den Störungsformeln für die von HANSEN angenommenen Koordinaten auch die Formeln für die Störungen der elliptischen Elemente zur Anwendung kommen, führen wir um der Vollständigkeit willen eine Herleitung der angewandten Differentialgleichungen hier desto lieber an, als dieselbe sehr kurz ist.

Es mögen x, y, z die auf irgend ein festes Koordinaten-System, dessen Origo mit der Sonne zusammenfällt, bezogenen geradlinigen Koordinaten des gestörten Körpers sein, dessen Masse wir mit m bezeichnen. Die mit einem Striche bezeichneten Buchstaben seien dieselben Grössen in Bezug auf den störenden Körper, k^2 die Einheitskraft

$$\mu = k^2(1+m)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;\ \Delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left[\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right].$$

[1]) GAUSS' Werke III. p. 355

dann sind x, y, z durch das folgende System von Differentialgleichungen bestimmt

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = \mu\frac{\partial\Omega}{\partial x}$$
$$\frac{d^2y}{dt} + \frac{\mu y}{r^3} = \mu\frac{\partial\Omega}{\partial y}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = \mu\frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Statt die Bewegung des Körpers auf ein festes Koordinaten-System zu beziehen, können wir ein solches benutzen, das selbst in Bewegung ist; stellen wir noch die Bedingung fest, dass in diesem beweglichen Systeme die ersten Differentiale der auf dasselbe bezogenen Koordinaten allein von der Ortsveränderung des Planeten im Raum, und nicht von der Veränderung des Koordinatensystems abhängen, so zeigt es sich, dass es unendlich viele Koordinatensysteme dieser Art giebt, die aber alle den gemeinschaftlichen Charakter haben, dass ihre Bewegung stets um den Radius vector als die augenblickliche Drehungsachse geschieht [1]). Wenn wir von diesen Systemen dasjenige wählen, dessen XY-Ebene stets die zwei auf einander folgenden Radien vectores des Planeten enthält [2]), so bekommen wir die Hansenschen Koordinaten, deren Differentialgleichungen

$$\frac{d^2X}{dt} + \frac{\mu X}{r^3} = \mu\frac{\partial\Omega}{\partial X}$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{\mu X}{r^3} = \mu\frac{\partial\Omega}{\partial Y}$$

den zwei ersten voriger Seite ähnlich sind. Führen wir hier Polarkoordinaten ein

$$X = r\cos v \qquad Y = r\sin v$$

so bekommt man

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{r^2} &= \mu\frac{\partial\Omega}{\partial r} \\ \frac{dr^2\frac{dv}{dt}}{dt} &= \mu\frac{\partial\Omega}{dv}, \end{aligned}\right. \tag{33}$$

die wir mit Hülfe der Lagrangeschen Methode der Variation der Konstanten integriren. Zunächst bekommt man

$$r^2\frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu p}\,; \quad \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin(v - \pi).$$

---

[1]) Diesen Satz findet man zuerst in einem Briefe von Jacobi an Hansen ausgesprochen (C. G. J. Jacobis Mathematische Werke Band II p. 341), welcher Brief übrigens viele interessante Bemerkungen über die Hansenschen Teorien enthält.

[2]) Wie benutzen die Gelegenheit um zu bemerken, dass man nicht unwesentliche Vortheile gewinnen könnte, wenn man das Koordinatensystem, so wählte, dass die xy-Ebene durch den Radius vector so wohl des gestörten, wie des störenden Körpers ging.

[3]) In diesen wie in den folgenden Formeln ist es unnöthig die Bedeutung der Buchstaben zu erklären, da die Bezeichnungen die in der Astronomie allgemein gebräuchlichen sind.

Wir erhalten dann aus (33)

$$\frac{d\sqrt{\mu p}}{dt} = \mu \frac{\partial \Omega}{\partial v}. \tag{34}$$

Wenn man den Ausdruck für $\frac{dr}{dt}$ quadrirt, und zu dem Resultate die folgende Gleichung

$$\left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 = e^2 \cos^2(v - \pi)$$

addirt, so bekommt man

$$\frac{p}{\mu}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 = e^2,$$

welche Gleichung durch Differentiation giebt

$$\left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2}{r}\left(\frac{p}{r} - 1\right)\right]\frac{dp}{dt} + \frac{2p}{\mu}\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} = 2e\frac{de}{dt}. \tag{35}$$

Indem wir jetzt bemerken dass $(f = v - \pi)$

$$e^2 \sin^2 f = e^2 - \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2$$

mithin

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{p}\left[e^2 - \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2}{r}\left(\frac{p}{r} - 1\right) = \frac{1}{r}\left[\frac{p}{r} - \frac{r}{a}\right] = \frac{e}{r}[\cos f + \cos \varepsilon],$$

so bekommen wir aus (35) unter Berücksichtigung von (33) und (34)

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\mu p}\left[\sin f \frac{\partial \Omega}{\partial r} + (\cos f + \cos \varepsilon)\frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right]. \tag{36}$$

Die Gleichung

$$\frac{p}{r} - 1 = e \cos(v - \pi)$$

giebt

$$\frac{1}{r}\frac{dp}{dt} = \frac{de}{dt}\cos f + e \sin f \frac{d\pi}{dt},$$

d. h. unter Berücksichtigung der früher erhaltenen Werthe für $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{de}{dt}$

$$\sin f\, e\frac{d\pi}{dt} = \sqrt{\mu p}\left[-\cos f \sin f \frac{\partial \Omega}{\partial r} + (\sin^2 f + 1 - \cos f \cos \varepsilon)\frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right];$$

es ist aber

$$1 - \cos f \cos \varepsilon = \frac{a \sin^2 \varepsilon}{r} - \frac{r \sin^2 f}{p}$$

mithin

$$e\frac{d\pi}{dt} = \sqrt{\mu p}\left[\cos f\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right]. \tag{37}$$

12. Die drei Gleichungen (34), (36) und (37) bestimmen nun die Variation derjenigen Elemente, die wir für unseren Zweck zu kennen brauchen. Die obigen Gleichungen sind zuerst von ENCKE gegeben[1]) und von ihm zur Berechnung der Variation der Elemente benutzt; wir werden dieselben anwenden um die Differentialgleichungen der Hansenschen Koordinaten darzustellen. Bezeichnen wir wie früher mit v die wahre Länge in der beweglichen Bahnebene, mit r den wahren Radius vector; die Aufgabe sei zwei Grössen z und r so zu bestimmen, dass r und v aus dem folgenden Systeme von Gleichungen sich berechnen lassen

$$\left\{\begin{aligned} n_0 z + c_0 &= \varepsilon - e_0\sin\varepsilon \\ \tan\tfrac{1}{2}(v-\pi_0) &= \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}}\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon \\ \frac{p_0}{r} &= 1 + e_0\cos(v-\pi_0) \\ r &= r(1+r), \end{aligned}\right. \tag{38}$$

wo wir mit n_0, e_0 etc. *konstante* Elemente bezeichnen.

Es ist aber auch möglich dieselben r und v aus den für die Zeit t oskulirenden Elementen n, c etc. zu bestimmen und zwar unter Anwendung der Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} nt + c &= \varepsilon - e\sin\varepsilon \\ \tan\tfrac{1}{2}(v-\pi) &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon \\ \frac{p}{r} &= 1 + e\cos(v-\pi). \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Indem wir nur die erste Potenz der störenden Kräfte berücksichtigen, d. h. r und $(z-t)$ wie kleine Grössen betrachten, deren Quadrate und höhere Potenzen vernachlässigt werden können, ist es sehr leicht die Differentialgleichungen zur Bestimmung von r und z aufzustellen.

Untersuchen wir zunächst die Funktion r.

Wenn wir die beiden Gleichungen

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(v-\pi)$$

$$\frac{p_0}{r} = 1 + e_0\cos(v-\pi_0)$$

[1]) Berliner astr. Jahrbuch 1838 p. 300 ff.

mit einander dividiren und zur Abkürzung setzen

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \delta p \\ e &= e_0 + \delta e \\ \pi &= \pi_0 + \delta\pi , \end{aligned}$$

indem wir auf die Gleichung

$$\frac{r}{r} = 1 + \nu$$

Rücksicht nehmen, erhalten wir augenblicklich

$$\nu = \frac{\delta p}{p} - \frac{r\cos f}{p}\delta e - \frac{r\sin f}{p} e\delta\pi , \tag{40}$$

oder, wenn wir die excentrische Anomalie einführen,

$$\nu = \frac{\delta p}{p} - \frac{\cos\varepsilon - e}{1-e^2}\delta e - \frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{1-e^2}} e\delta\pi \tag{41}$$

Man bekommt aber, wenn man

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(v - \pi)$$

nach allen eingehenden Grössen differentiirt,

$$\frac{1}{r}\frac{dp}{dt} = \cos f\frac{de}{dt} + \sin f e\frac{d\pi}{dt}$$

und wenn wir auf diese Gleichung Rücksicht nehmen, und (41) nach ε differentiiren, so wird also

$$\frac{d\nu}{d\varepsilon} = \sin\varepsilon\frac{\delta e}{1-e^2} - \cos\varepsilon\frac{e\delta\pi}{\sqrt{1-e^2}} , \tag{42}$$

was die Differentialgleichung für ν ist. Wir bemerken aber, dass man ν ebenso wohl ohne Integration aus (41) berechnen kann.

Um zu der Differentialgleichung für z zu gelangen, setzen wir

$$\begin{aligned} v &= f + \pi_0 = f + \pi \\ z &= t + \delta z \end{aligned}$$

dann wird erstens

$$\frac{dv}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}$$

mithin

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{df}{dz}} ;$$

es ist aber

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}; \quad \frac{df}{dz} = \frac{\sqrt{\mu p_0}}{r^2},$$

also

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{p}\, r^2}{\sqrt{p_0} r^2} = 1 - 2\nu + \tfrac{1}{2}\frac{\delta p}{p}$$

oder, wenn wir den Ausdruck (40) für ν einführen,

$$\frac{d\delta z}{dt} = -\tfrac{3}{2}\frac{\delta p}{p} + \frac{r\cos f}{p}\cdot 2\delta e + \frac{r\sin f}{p}\cdot 2e\delta\pi$$

oder

$$\frac{d\delta z}{dt} = -\tfrac{3}{2}\frac{\delta p}{p} + (\cos\varepsilon - e)\frac{2\delta e}{1-e^2} + \sin\varepsilon\frac{2e\delta\pi}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{43}$$

13. Da wir die Störungsfunktion und ihre partiellen Ableitungen in Reihen entwickeln werden, die nach den Vielfachen der excentrischen Anomalie ε fortschreiten, so wird es nothwendig, in den gegebenen Differentialausdrücken ε statt t wie die unabhängige Veränderliche einzuführen. Gleichzeitig werden wir mittelst der Gleichung

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial v} = \frac{1}{a\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - \frac{e\sin\varepsilon}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

$\frac{\partial\Omega}{\partial v}$ mit $\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$ ersetzen.

Setzen wir also in (34), (36) und (37)

$$ndt = \frac{r}{a}d\varepsilon,$$

führen da statt dp mittelst der Formel

$$\frac{da}{a} = \frac{dp}{p} + \frac{2ede}{1-e^2}$$

ein, so bekommen wir mit Anwendung der Gleichungen

$$\cos\varphi\sin f - e\cos f\sin\varepsilon = \sin\varepsilon$$
$$\cos\varphi\cos f + e\sin f\sin\varepsilon = \cos\varphi\cos\varepsilon$$

ohne Schwierigkeit die folgenden Differentialgleichungen zur Bestimmung der Elemente a, e und π

$$
(44)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{da}{d\varepsilon} = 2a^2\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} \\
\dfrac{de}{d\varepsilon} = \left[-\tfrac{3}{2}e + 2\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}e\cos 2\varepsilon\right]a\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + \\
\qquad + \left[\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e\sin 2\varepsilon\right]ar\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} \\
e\dfrac{d\pi}{d\varepsilon} = \cos\varphi\left[\left(2 + \dfrac{e^2}{\cos^2\varphi}\right)\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}\dfrac{e}{\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon\right]a\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - \\
\qquad - \cos\varphi\left[\tfrac{1}{2}\dfrac{e}{\cos^2\varphi} + \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\dfrac{e}{\cos^2\varphi}\cos 2\varepsilon\right]ar\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}.
\end{cases}
$$

Ein Blick auf die Gleichungen für δz und ν zeigt uns sogleich, dass die Ausdrücke für dieselben sich etwas vereinfachen, wenn man setzt

$$
(45)\qquad
\begin{cases}
Y = \dfrac{2\delta e}{1-e^2} \\
\Gamma = \dfrac{2e\delta\pi}{\sqrt{1-e^2}};
\end{cases}
$$

wovon

$$
(46)\qquad
\begin{cases}
2\dfrac{d\iota}{d\varepsilon} = Y\sin\varepsilon - \Gamma\cos\varepsilon \\
\dfrac{dn\delta z}{d\varepsilon} = \left[-\tfrac{3}{2}\dfrac{\delta a}{a} + \tfrac{1}{2}eY + Y\cos\varepsilon + \Gamma\sin\varepsilon\right](1 - e\cos\varepsilon).
\end{cases}
$$

Wir bemerken noch, dass man ν ohne Integration bekommen kann, mit Anwendung der Gleichung

$$
(47)\qquad \nu = \frac{\delta a}{a} - (\cos\varepsilon - e)Y - \Gamma\sin\varepsilon
$$

Zur Kontrolle dient die Gleichung

$$
\frac{dn\delta z}{d\varepsilon} = \left(\tfrac{1}{2}\frac{\delta a}{a} - \tfrac{1}{2}eY - 2\nu\right)(1 - e\cos\varepsilon).
$$

14. Zum Schluss ein Paar Worte über die Störungen der Bahnebene. Wenn φ die Rotationsgeschwindigkeit um den Radius vector, Z eine gegen die augenblickliche Bahnebene senkrechte Richtung bezeichnet so ist

$$
\varphi = \frac{n}{\cos\varphi}ar\frac{\partial\Omega}{\partial Z}.
$$

Statt φ selbst berechnet HANSEN dessen Komposanten längs der Knotenlinie und der in der Ebene der Bahn liegenden dagegen senkrechten Richtung, von welcher jene mit der Störung der Inklination, diese mit der Störung der Knotenlänge mit $\sin i$ multiplicirt

zusammenfällt. Die fraglichen Komposanten (mit $\cos i$ multiplicirt) bezeichnet HANSEN mit den Buchstaben q und p, so dass nämlich

$$p = \sin i \,.\, \delta\omega \cos i$$
$$q = \delta i \cos i$$

Gewöhnlich hat man aber statt der obigen Elemente die Komposanten längs der Achsen der Planetenellipse benutzt, wobei man dieselbe Bezeichnung p und q für die Komposanten benutzt hat; die Formeln werden aber in diesem Falle einfacher; in der That wird

$$\frac{dp}{dt} = \varphi \sin f = \frac{n}{\cos\varphi} \sin f\, ar \frac{\partial\Omega}{\partial Z}$$
$$\frac{dq}{dt} = \varphi \cos f = \frac{n}{\cos\varphi} \cos f\, ar \frac{\partial\Omega}{\partial Z}$$

oder wenn ε eingeführt wird

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dp}{d\varepsilon} = \sin\varepsilon\, ar \dfrac{\partial\Omega}{\partial r} \\ \cos\varphi \dfrac{dq}{d\varepsilon} = (\cos\varepsilon - e)\, ar \dfrac{\partial\Omega}{\partial r}\,. \end{array}\right. \tag{48}$$

und wenn man mit s die Breitenstörung bezeichnet und $u = \dfrac{r}{a} \,.\, s$ setzt, so wird endlich

$$\frac{u}{\cos i} = q \cos\varphi \,.\, \sin\varepsilon - p\,(\cos\varepsilon - e)\,. \tag{49}$$

15. Um alle Formeln, die sich auf die Differentialgleichungen der Störungen beziehen, zusammengestellt zu haben, fügen wir noch die Ausdrücke für Ω, $\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}$ und $\dfrac{\partial\Omega}{\partial Z}$ hinzu [1]

$$\left\{\begin{array}{l} a\Omega = \mu\left(\dfrac{a}{\Delta}\right) - (H) \\ ar\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{1}{2}\mu\left(\dfrac{a}{\Delta}\right)^3\left[a^2\left(\dfrac{r'}{a'}\right)^2 - \left(\dfrac{r}{a}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\mu\left(\dfrac{a}{\Delta}\right) - (H) \\ a^2\dfrac{\partial\Omega}{\partial Z} = -\mu\left(\dfrac{a}{\Delta}\right)^3 a \sin I\left(\dfrac{r'}{a'}\right)\sin(f + \pi') + (I) \\ (H) = \dfrac{\mu}{a^2}\left(\dfrac{a'}{r}\right)^2\left(\dfrac{r}{a}\right).\cos \mathrm{H}. \\ (I) = \dfrac{\mu}{a^2}\sin I\left(\dfrac{a'}{r'}\right)^2 \sin(f' + \pi') \end{array}\right. \tag{50}$$

[1] *Auseinandersetzung.* I. p. 120.

Einführung des Gyldénschen Argumentes X_m.

16. Bekanntlich ist die Form, durch welche HANSEN die Störungen endgültig ausdrückt, die folgende

$$(51)\qquad \begin{aligned} F &= \sum\sum [i,\ i',\ c] \cos (i\varepsilon - i'V) + \sum\sum [i,\ i',\ s] \sin (i\varepsilon - i'V) \\ V &= \mu(\varepsilon - c) + c', \end{aligned}$$

Da die obige Reihe nach den Vielfachen zweier Argumente ε und V fortschreitet, die sich beide mit ε verändern, so ist est sehr beschwerlich aus der obigen Reihe einen numerischen Werth von F zu berechnen, der einem gewissen Werth von ε entspricht; hieraus entsteht die Nothwendigkeit die Störungen zu tabuliren. Wenn man aber $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} i'V$ nach den Vielfachen von ε entwickeln könnte, so würde F nach den Vielfachen von ε allein fortschreiten, in welchem Falle das Tabuliren im Allgemeinen gerade als unnöthig erachtet werden konnte, jedenfalls bei Weitem nicht so viel Arbeit erfordern würde. Es war daher ein bedeutender Fortschritt, als GYLDÉN 1868 nachwies, dass man sehr konvergente Reihen für $\cos \mu\varepsilon$ und $\sin \mu\varepsilon$ in dem Falle wo μ irrational ist, finden kann, wenn man sich nur auf Werthe von ε beschränkt, die zwischen

$$m + \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad m - \frac{\pi}{2}$$

liegen, wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Mit Hülfe dieser Reihen ist es jetzt möglich, statt der obigen Form für F die folgende zu bekommen

$$(52)\qquad F = \sum\sum [i,\ i',\ c] \cos (i\varepsilon - i'X_m) + \sum\sum [i,\ i',\ s] \sin (\varepsilon - i'X_m)$$

wo

$$X_m = \mu [m\pi - c] + c',$$

wo also X_m unter einem halben Umlauf des Planeten konstant ist; statt (52) schreiben wir besser

$$(53)\qquad F = C_0^{(m)} + C_1^{(m)} \cos \varepsilon + C_2^{(m)} \cos 2\varepsilon + \ldots + S_1^{(m)} \sin \varepsilon + S_2^{(m)} \sin 2\varepsilon + \ldots$$

wo $C_0^{(m)}$, $C_1^{(m)}$, etc. für $m + \frac{\pi}{2} > \varepsilon < m - \frac{\pi}{2}$ absolute Konstanten sind. Während man mit Anwendung von (51) im Allgemeinen wenigstens 100 Glieder mitnehmen muss, sind in (53) ungefähr 15 Glieder hinreichend. Für jeden der Koefficienten C bekommt man die Form

$$C_i^{(m)} = g_0^{(C,\,i)} + g_1^{(C,\,i)} \cos X_m + g_2^{(C,\,i)} \cos 2X_m + \ldots + h_1^{(C,\,i)} \sin X_m + h_2^{(C,\,i)} \sin 2X_m + \ldots$$

und eine ähnliche Formel für $S_i^{(m)}$.

Bevor wir zur Bestimmung von $\left[i,\ i',\ {}^{c}_{s}\right]$, g_n und h_n als Funktionen von $\left[i,\ i',\ {}^{c}_{s}\right]$ übergehen, werden wir die Reihen für $\sin \mu x$ und $\cos \mu x$ herleiten. In einem Aufsatz in den Verhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Stockholm [1]) hat der Verfasser eine allgemeine Methode gegeben, nach der man verschiedene Entwickelungen dieser Funktionen und anderer verwandten bekommen kann. In dem besprochenen Aufsatz (in dem Folgenden mit *M* bezeichnet) ist eine dieser Reihen für $\cos \mu x$ und $\sin \mu x$ angegeben; wir bemerken aber dass, wenn wir dieselbe unter der Form

$$\cos \mu x = \sum_{-\infty}^{\infty} C_m \cos mx + \sum_{1}^{2r} 2b_n \sin nx$$

schreiben, so nimmt m alle ganzen Zahlwerthe an; es wäre natürlich vortheilhaft, solche Reihen zu haben, die nur die geraden oder nur die ungeraden Vielfachen des Winkels enthielten; dass dies in der That möglich ist, zeigen die Gyldénschen Reihen für die besprochenen Funktionen, da in diesen Reihen alle Koefficienten mit geradem Index verschwinden.

Um zu diesen und ähnlichen Reihen zu kommen, werden wir zuerst eine Transformation von (*M.* 4) vornehmen. Wir gehen nicht wie dort von einer Reihe (*M.* 1) für die zu untersuchende Funktion aus, die zwischen 0 und π Gültigkeit hat, sondern wollen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ als Grenzen des Gültigkeitsbereiches der Reihen [2]) wählen. Die Ausdrücke für die Koefficienten in der Entwickelung sind leicht zu erhalten, und wir finden, dass jede Funktion $f(x)$, die zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$, die Grenzen inklusive, eindeutig und endlich ist (und deren Maxima und Minima einander nicht unendlich nahe liegen), zwischen den genannten Grenzen mittelst der Formeln

$$f(x) = \tfrac{1}{2}C_0 + C_1 \sin x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 3x + \ldots \tag{54}$$

$$f(x) = \quad D_1 \cos x + D_2 \sin 2x + D_3 \cos 3x + \ldots \tag{55}$$

darstellbar ist, wo [3])

[1]) *En metod att föröka konvergensen hos en trigonometrisk serie.* Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1886. N:o 5; Übersetzt in *Bulletin Astronomique publié par* M. F. Tisserand. August 1886.

[2]) Dass diese Veränderung in dem jetztigen Falle nützlich ist, ist nicht schwer einzusehen. Wenn wir z. B. für $\cos \mu x$ eine cosinus-Reihe aufsuchen, die zwischen O und π gültig ist, so muss dieselbe Reihe auch zwischen O und $-\pi$ $\cos \mu x$ darstellen, da $\cos \mu x$ eine gerade Funktion ist; suchen wir dagegen eine Reihe für dieselbe Funktion zwischen den Grenzen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$, so wird dieselbe Reihe im Allgemeinen nicht $\cos \mu x$ ausser diesen Grenzen wiedergeben.

[3]) Vergleiche Gyldén: *Relationer mellan cosiner och siner för irrationela vinklar* p. 5.

$$(54^*)\qquad \begin{cases} \frac{\pi}{2} C_{2n} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nx\,dx \\ \frac{\pi}{2} C_{2n+1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x) \sin (2n+1)x\,dx \end{cases}$$

$$(55^*)\qquad \begin{cases} \frac{\pi}{2} D_{2n} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nx\,dx \\ \frac{\pi}{2} D_{2n-1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x) \cos (2n+1)x\,dx\,. \end{cases}$$

Von diesen Reihen ist die erste (54) für alle Werthe gültig, die zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ liegen und auch für diese Grenzen selbst, dagegen gilt die letzte Reihe nur *zwischen* den genannten Grenzen, wenn nicht

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

da aber die jetzt zu untersuchenden Funktionen diese Bedingung nicht erfüllen, und es bei Anwendungen für astronomische Zwecke von wesentlicher Bedeutung ist, dass die Reihen für die Grenzen selbst gelten, so werden wir uns nur mit der ersten Form (54) beschäftigen und dieselbe auf die Entwickelung von $\cos \mu x$ und $\sin \mu x$ anwenden.

$$(56)\qquad \frac{\cos \mu x}{\sin \mu \frac{\pi}{2}} = \frac{4\mu}{\pi}\left[\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos 2x}{2^2 - \mu^2} - \frac{\cos 4x}{4^2 - \mu^2} \pm \cdots\right]$$

$$(57)\qquad \frac{\sin \mu x}{\cos \mu \frac{\pi}{2}} = \frac{4\mu}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^2 - \mu^2} \quad \frac{\sin 3x}{3^2 - \mu^2} \pm \cdots\right]$$

Da diese Reihen aber sehr schwach konvergiren, wenden wir auf dieselben das in »*En Metod att föröka konvergensen* etc.» angegebene Verfahren an, um uns mehr konvergente Reihen zu verschaffen.

Wenn wir zuerst die Reihe für $\sin \mu x$ ins Auge fassen, so müssen wir versuchen nach dem in der besprochenen Abhandlung aufgestellten Prinzipe, einige willkürliche Grössen β_1, β_3 etc. so zu bestimmen, dass die Entwickelung von

$$\frac{\sin \mu x}{\cos \mu \frac{\pi}{2}} - \sum_{m=1}^{r} 2\beta_{2m}^{(r)} \sin 2mx$$

möglichst konvergent ausfällt. Da die fragliche Entwickelung nur die Sinus der *ungeraden* Vielfachen von x enthalten kann, setzen wir

$$\frac{\sin \mu x}{\cos \mu \frac{\pi}{2}} - \sum_{m=1}^{r} 2\beta_{2m}^{(r)} \sin 2mx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1}^{(r)} \sin (2n+1)x \tag{58}$$

mithin nach (54*)

$$\frac{\pi}{2}\alpha_{2n+1}^{(r)} = (-1)^n \left\{ \frac{2\mu}{(2n+1)^2 - \mu^2} + \sum_{m=1}^{r} \frac{(-1)^m 8m\beta_{2m}^{(r)}}{4m^2 - (2n+1)^2} \right\}$$

oder, wenn

$$(-1)^m 8m\beta_{2m}^{(r)} = \gamma_m \quad (m = 1, 2, \ldots r), \tag{59}$$

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}\alpha_{2n+1}^{(r)} &= \frac{-2\mu}{(2n+1)^2 - \mu^2} + \sum \frac{\gamma_m}{(2n+1)^2 - 4m^2} \\ &= \frac{-2\mu\Pi^{(0)} + \gamma_1\Pi^{(1)} + \ldots + \gamma_r\Pi^{(r)}}{[(2n+1)^2 - \mu^2][(2n+1)^2 - 2^2] \ldots [(2n+1)^2 - 4r^2]} \end{aligned} \tag{60}$$

wo

$$[(2n+1)^2 - 4p^2]\Pi^{(p)} = [(2n+1)^2 - \mu^2]\prod_{m=1}^{r}[(2n+1)^2 - 4m^2]. \tag{60*}$$

Die Koefficienten γ sollen nun so bestimmt werden, dass der Zähler in (60) sich auf eine Konstante reducirt; wir erhalten dann ein System von r linearen Gleichungen, welches wir mit Hülfe der Determinante (*M.* 13) auflösen. Der Werth von γ_p, den wir so bekommen, ist

$$\gamma_p = (-1)^{m+1} \frac{4\mu \prod_{n=1}^{r}\left(1 - \frac{\mu^2}{4n^2}\right)}{1 - \frac{\mu^2}{4p^2}} \frac{r}{r-p} \frac{r}{r+p} \tag{61}$$

mithin nach (59)

$$\beta_{2m}^{(r)} = -\frac{\mu}{2m} \frac{\prod\left(1 - \frac{\mu^2}{4n^2}\right)}{1 - \frac{\mu^2}{4m^2}} \cdot \frac{r}{r-m} \frac{r}{r+m}. \tag{62}$$

Den Zähler in (60) können wir auf eine einfachere Form bringen. Das von m unabhängige Glied in $\Pi^{(p)}$, welches wir mit $\Pi_0^{(p)}$ bezeichnen, ist nach (60*), wenn p nicht gleich Null ist,

$$\prod_0^{(p)} = (-1)^r \frac{\mu^2}{4p^2} \frac{r}{} \frac{r}{} 2^{2r},$$

für p gleich Null aber

$$\prod_0^{(0)} = (-1)^r \frac{r}{} \frac{r}{} 2^{2r}.$$

Indem wir also den Zähler in (60) mit $k\mu C_r(\mu)$ bezeichnen, unter k eine noch unbestimmte von μ unabhängige Grösse verstehend, so wird

$$k\mu C_r(\mu) = (-1)^r 2^{2r} \frac{r}{} \frac{r}{} \left\{ -2\mu + \frac{\mu^2\gamma_1}{2^2} + \frac{\mu^2\gamma_2}{4^2} + \ldots + \frac{\mu^2\gamma_r}{4r^2} \right\}.$$

Mittelst der Formel (61) sieht man aber augenblicklich ein, dass γ_p eine ganze rationale Funktion von μ von dem Grade $2r-1$ ist, so dass die rechte Seite in dem obigen Ausdruck selbst eine ganze rationale Funktion von μ, und zwar höchstens von dem Grade $2r+1$ ist. $C_r(\mu)$ also höchstens von dem Grade $2r$. Wenn man aber $\mu = \pm 2p$ $(p = 1, 2, \ldots r)$ setzt, so verschwinden alle γ ausser γ_p, welche Grösse gleich $\pm 4p$ wird. Hieraus findet man

$$C_r(\pm 2p) = 0; \quad (p = 1, 2, \ldots r)$$

Da wir aber schon gezeigt haben, dass $C_r(\mu)$ eine ganze rationale Funktion *höchstens* von dem Grade $2r$ ist, und wir von dieser Funktion $2r$ einfache Nullstellen kennen, so muss $C_r(\mu)$ eben von diesem Grade $2r$ sein. Wir sind nun berechtigt zu setzen

$$C_r(\mu) = \left[1 - \frac{\mu^2}{2^2}\right]\left[1 - \frac{\mu^2}{4^2}\right] \ldots \left[1 - \frac{\mu^2}{4r^2}\right] \tag{63}$$

und dann wird

$$k = (-1)^{r+1} 2^{2r+1} \frac{r}{} \frac{r}{},$$

endlich nach (60)

$$\frac{\pi}{2}\alpha_{2n+1} = \frac{(-1)^{r+n}\mu C_r(\mu)}{\left[1 - \frac{\mu^2}{(2n+1)^2}\right]} \cdot \frac{2^{2r+1} \frac{r}{} \frac{r}{}}{\prod_{m=0}^{r}[(2n+1)^2 - 4m^2]}. \tag{64}$$

Die Gleichungen (62) und (64) bestimmen also die Koefficienten in der Entwickelung

$$\frac{\sin \mu x}{\cos \mu \frac{\pi}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1}^{(r)} \sin (2n+1)x + \sum_{m=1}^{r} 2\beta_{2m}^{(r)} \sin 2mx. \tag{65}$$

Auf vollkommen ähnliche Art kann aus (56) die folgende Entwickelung für $\cos \mu x$ hergeleitet werden:

$$\frac{\cos \mu x}{\sin \mu \frac{\pi}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n}^{(r)} \cos 2nx + \sum_{m=1}^{r} 2\beta_{2m+1}^{(r)} \cos (2m+1)x , \tag{66}$$

wo $\alpha_{n2}^{(r)}$ und $\beta_{2m+1}^{(r)}$ in ähnlicher Weise, wie $\alpha_{2n+1}^{(r)}$ und $\beta_{2n}^{(r)}$, zusammengesetzt sind.

Durch Einführung der Bezeichnungen

$$\begin{cases} p_{2n+1} = (-1)^{r+n} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{2^{2r+2} r \; \underline{r}}{\prod_{m=0}^{r} [(2n+1)^2 - 4m^2]} \\ p_{2n} = -\dfrac{1}{n} \dfrac{\lfloor r \; \underline{r}}{\underline{r-n} \; \underline{r+n}} \end{cases} \tag{67}$$

$$\begin{cases} S_{2n+1} = \cos \mu \dfrac{\pi}{2} \alpha_{2m+1} \\ S_{2n} = \cos \mu \dfrac{\pi}{2} 2\beta_{2n} \end{cases} \tag{68}$$

nehmen die Gleichungen (65) und (66) resp. endlich folgende Formen an

$$\begin{cases} \sin \mu x = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin nx \\ S_n = \cos \mu \dfrac{\pi}{2} \dfrac{\mu C_r(\mu)}{1 - \left(\frac{\mu}{n}\right)^2} \cdot p_n \end{cases} \tag{69}$$

und

$$\cos \mu x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos nx . \tag{70}$$

19. Wir werden noch die Reihen für $\sin \mu x$ und $\cos \mu x$ aufstellen, die man durch Differentiation oder Integration aus (69) und (70) erhält; nur müssen wir zuerst untersuchen, ob es auch zulässig ist, jene Operationen mit den obigen Reihen vorzunehmen. Eine derartige Untersuchung zeigt uns, dass sowohl (69) wie (70) differentiirt und integrirt werden können, dass aber nur (69) bei der Integration eine neue trigonometrische Reihe giebt.

Durch Differentiation bekommt man

$$\mu \cos \mu x = \sum_{n=1}^{\infty} n S_n \cos nx \tag{71}$$

$$\mu \sin \mu x = \sum_{n=0}^{\infty} n C_n \sin nx , \tag{72}$$

und durch Integration von (69)

$$\cos \mu x = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu S_n}{n} \cos nx . \tag{73}$$

Die Integrationskonstante S_0 bestimmen wir dadurch, dass wir $x = \frac{\pi}{2}$ setzen, dann wird

$$S_0 = \cos \mu \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{r} \frac{\mu S_{2n}}{2n} = \cos \mu \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{r} \frac{\mu}{n} \beta_{2n} \right]$$

und eine Diskussion dieser Gleichung zeigt uns leicht, dass ganz einfach

$$S_0 = \cos \mu \frac{\pi}{2} C_r(\mu) . \tag{74}$$

20. Durch die Kombination von einer Reihe für $\cos \mu x$ mit einer für $\sin \mu x$, können wir eine Reihe für $e^{i\mu x}$ herleiten. Wenn wir an dieselbe diejenige Forderung stellen, die wir schon an die Entwickelung für $\cos \mu x$ und $\sin \mu x$ gestellt haben, dass nämlich — von einer endlichen Zahl von Gliedern abgesehen, — entweder nur gerade oder nur ungerade Vielfachen des Winkels vorkommen sollen, so sind wir darauf beschränkt, entweder (69) mit einer von der Reihen (71) und (73), oder (70) mit (72) zu kombiniren. Da aber die durch Differentiation erhaltenen (71) und (72) weniger konvergent als die übrigen sind, die Konvergenz von (73) dagegen durch Integration vergrössert worden ist, so wird es am vortheilhaftesten, für die Entwickelung von $e^{i\mu x}$ (69) und (73) anzuwenden. Schreiben wir diese Entwickelung unter der Form

$$e^{\sqrt{-1}\mu x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_n e^{\sqrt{-1}nx}, \tag{75}$$

so ist also

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{1}{2} S_n \left[1 + \frac{\mu}{n} \right] \\ \sigma_{-n} = -\frac{1}{2} S_n \left[1 - \frac{\mu}{n} \right] \\ \sigma_0 = \cos \mu \frac{\pi}{2} C_r(\mu) . \end{cases}$$

Die eben erhaltene Reihe, wie auch (69) und (73), sind dieselben, die GYLDÉN für die Entwickelung der betreffenden Funktionen aufgestellt hat. [1])

Die rechte Seite von (75) stellt nur in dem Falle die Entwickelung von $e^{i\mu x}$ dar, wenn x zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ liegt. Setzen wir aber

$$x = \varepsilon - m\pi ,$$

mithin statt (75)

$$e^{\sqrt{-1}\mu\varepsilon} = e^{m\mu\pi\sqrt{-1}} \sum (-1)^{mn} \sigma_n e^{\sqrt{-1}n\varepsilon} , \tag{76}$$

so erhalten wir eine Reihe, die für jeden beliebigen Werth von ε gültig ist, wenn nur m so gewählt wird, dass

$$\frac{\pi}{2} < \varepsilon - m\pi < +\frac{\pi}{2} .$$

21. Die Aufgabe, die wir uns im Anfange dieser Abtheilung gestellt haben: die Störungen von der Form (51) auf die Form (52) zu übertragen, ist jetzt nicht schwer zu lösen. Da

$$V = \mu(\varepsilon - c) + c' ,$$

so giebt uns die Formel (76) zuerst

$$e^{-\sqrt{-1}i'V} = e^{-\sqrt{-1}i'X_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{mn} \sigma_n^{(i')} e^{\sqrt{-1}n\varepsilon} \tag{77}$$

$$X_m = \mu(m\pi - c) + c' ,$$

mithin

$$e^{\sqrt{-1}(i\varepsilon - i'V)} = e^{-\sqrt{-1}i'X_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{mn} \sigma_n^{(i')} e^{\sqrt{-1}(i+n)\varepsilon} \tag{77*}$$

oder

$$\begin{aligned} \cos(i\varepsilon - i'V) &= \sum (-1)^{mn} \sigma_n^{(i')} \cos[(i+n)\varepsilon - i'X_m] \\ \sin(i\varepsilon - i'V) &= \sum (-1)^{mn} \sigma_n^{(i')} \sin[(i+n)\varepsilon - i'X_m] . \end{aligned} \tag{77**}$$

Diese Reihen, in (52) eingesetzt, führen auf die Form (53) über; die neuen Koefficienten $\left\{i, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right\}$ sind mit den alten durch die folgende Gleichung verbunden

$$\left\{i, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right\} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{j-i} \left[j, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right], \tag{78}$$

wo

$$A_n = (-1)^{mn} \sigma_n^{(i')} .$$

[1]) (69) und (73) sind gegeben in *Relationer mellan siner och cosiner etc.*; (75) findet man in »*En metod för den analytiska härledningen af de små planeternas relativa störingar*». Öfversigt af K. Vet. Akad. Handl. 1874, I.

Da die Koefficienten $\left\{i, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right\}$ für m gerade und für m ungerade verschieden sind, muss man also *zwei* Reihen von der Form (53) berechnen; was zwar die Rechnung etwas umständlicher macht, übrigens aber fast in keiner Hinsicht die Vortheile verkleinert, die man durch Einführung des Argumentes X_m gewinnt.

22. Die Einführung des Gyldénschen Argumentes kann entweder vor der Integration oder nach derselben geschehen; wir werden die gegenseitigen Vorzüge und Nachtheile dieser beiden Verfahrungsarten auseinandersetzen. Unter f eine beliebige Störungsgrösse verstehend, denken wir uns dieselbe durch die Hansensche Endformel

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\varepsilon} &= \sum \left[i, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right] \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (i\varepsilon - i'V) \\ V &= \mu(\varepsilon - c) + c' \end{aligned} \tag{79}$$

dargestellt, und desgleichen auch unter der Form, die man durch Einführung des Argumentes X_m erhält

$$\frac{df}{d\varepsilon} = \sum i \left\{i, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (i\varepsilon - i'X_m). \tag{80}$$

Das Integral von (79) hat die Form

$$f = C + \sum \frac{\left[i, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right]}{i - i'\mu} \begin{matrix} \sin \\ -\cos \end{matrix} (i\varepsilon - i'V)$$

und von (80)

$$f = C_m + \sum \left\{i, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \sin \\ -\cos \end{matrix} (i\varepsilon - i'X_m),$$

wo C und C_m die Integrationskonstanten sind, deren letztere von m abhängig ist. Der Integrationsprozess geschieht scheinbar viel einfacher nach (80) als nach (79), indem wir bei Anwendung der ersteren Gleichung nur ganzzahlige Divisoren benutzen, wogegen in (79) fast alle Divisoren irrationale Zahlen sind. Hierzu kommt noch, dass bei der Integration von (80) alle Glieder verkleinert, wenigstens nicht vergrössert werden, bei der Integration von (79) aber einige Glieder durch das Vorkommen kleiner Divisoren wesentlich vergrössert in dem Integrale erscheinen. Man muss sich aber dann fragen: hat das Vorkommen solcher kleinen Divisoren auf die Integration von (80) gar keinen Einfluss? Eine Untersuchung zeigt uns, dass dieselben in C_m versteckt liegen; um die Frage näher zu erörtern setzen wir zuerst

$$f = \sum f_c^{(i, i')} + \sum f_s^{(i, i')},$$

wo

$$\frac{df_c^{(i, i')}}{d\varepsilon} = i\{i, i', c\} \cos(i\varepsilon - i'X_m),$$

mithin

$$f_c^{(i, i')} = C_{(m)}^{(i, i')} + \{i, i', c\} \sin[i\varepsilon - i'X_m] \tag{81}$$

und

$$f_s^{(i,\,i')} = S_{(m)}^{(i,\,i')} - \{i,\ i',\ s\} \cos\left[i\varepsilon - i'X_m\right]; \tag{81*}$$

dann ist

$$C_m = \sum\left[C_{(m)}^{(i,\,i')} + S_{(m)}^{(i,\,i')}\right].$$

Beschäftigen wir uns zuerst mit der Bestimmung von $C_{(m)}^{(i,\,i')}$. Wenn wir m gegen $m-1$ vertauschen, so gehen die Koefficienten $\{i,\ i',\ c\}$ in andere über (da dieselben für m gerade und für m ungerade verschieden sind), die wir $\{i,\ i',\ c\}_2$ nennen wollen, mithin wird dann

$$f_c^{(i,\,i')} = C_{(m-1)}^{(i,\,i')} + \{i,\ i',\ c\}_2 \sin\left[i\varepsilon - i'X_{m-1}\right] \tag{82}$$

Wenn wir

$$\varepsilon = m\pi - \frac{\pi}{2} = (m-1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

setzen, so müssen wir aus (82) denselben Werth für $f_c^{(i,\,i')}$ bekommen wie aus (81); mithin ist

$$C_{(m)}^{(i,\,i')} + \{i,\ i',\ c\} \sin\left[im\pi - i\frac{\pi}{2} - i'X_m\right] = C_{(m-1)}^{(i,\,i')} + \{i,\ i',\ c\}_2 \sin\left[im\pi - i\frac{\pi}{2} - i'X_{m-1}\right]$$

d. h. wenn wir den Werth von X_m berücksichtigen und die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} T_2 &= i'(\mu c - c') - i\frac{\pi}{2} \\ T &= T_2 + i'\mu\pi \\ \alpha &= (i - i'\mu)\pi \end{aligned}$$

einführen,

$$C_{(m)}^{(i,\,i')} - C_{(m-1)}^{(i,\,i')} = \{i,\ i',\ c\}_2 \sin\left[T_2 + m\alpha\right] - \{i,\ i',\ c\} \sin\left[T + m\alpha\right]$$

also

$$C_{(m-1)}^{(i,\,i')} - C_{(m-2)}^{(i,\,i')} = \{i,\ i',\ c\} \sin\left[T_2 + (m-1)\alpha\right] - \{i,\ i',\ c\}_2 \sin\left[T + (m-1)\alpha\right]$$

oder durch Addition

$$\begin{aligned} C_{(m)}^{(i,\,i')} - C_{(m-2)}^{(i,\,i')} = {} & \{i,\ i',\ c\}\left[\sin\left(T_2 + (m-1)\alpha\right) - \sin\left(T + m\alpha\right)\right] \\ & + \{i,\ i',\ c\}_2\left[\sin\left(T_2 + m\alpha\right) - \sin\left(T + m - 1)\alpha\right)\right]. \end{aligned} \tag{83}$$

In dieser Gleichung vertauschen wir m gegen $m-2$, $m-4$, etc. bis $m=2$ (wir nehmen m gerade an $= 2n$), und erhalten dann, indem wir alle die so erhaltenen Gleichungen addiren, mit Hülfe einer bekannten trigonometrischen Formel

$$\begin{aligned} C_{(2n)}^{(i,\,i')} = C_{(0)}^{(i,\,i')} & + \{i,\ i',\ c\}\ \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\left[\sin\left(T_2 + n\alpha\right) - \sin\left(T + (n+1)\alpha\right)\right] \\ & + \{i,\ i',\ c\}_2\ \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\left[\sin\left(T_2 + (n+1)\alpha\right) - \sin\left(T + n\alpha\right)\right] \end{aligned} \tag{84}$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$S^{(i,\,i')}_{(2n)} = S^{(i,\,i')}_{(0)} + \{i,\ i',\ s\}\,\frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha}\,[\cos(T_2 + n\alpha) - \cos(T + (n+1)\alpha)] \tag{85}$$

$$- [i,\ i',\ s]_2\,\frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha}\,[\cos[T_2 + (n+1)\alpha] - \cos(T + n\alpha)]\,.$$

Die Konstantenbestimmung für m ungerade [1]) geschieht ebenfalls ohne Schwierigkeit mit Hülfe der Gleichung (84); wir brauchen dieselbe nicht auszuführen.

Diese Gleichungen (84) und (85) lehren uns, welchen Einfluss die kleinen Divisoren auf die Konstantenbestimmung haben; wir brauchen uns nur des Werthes für α

$$\alpha = (i - i'\mu)\pi$$

zu erinnern, um die Analogie mit der Integration von (79) einzusehen. Wäre $i - i'\mu$ exakt gleich Null, so würden die obigen Gleichungen die folgende Form haben

$$C^{(i,\,i')}_{(2n)} = C^{(i,\,i')}_{(0)} + nK_c$$
$$S^{(i,\,i')}_{(2n)} = S^{(i,\,i')}_{(0)} + nK_s\,,$$

wo wir unter K_c und K_s zwei von n unabhängige Konstanten verstehen.

Durch die eben gemachte Untersuchung sind wir also zu dem Resultate gekommen, dass die Schwierigkeit, die bei der Integration von (79) durch das Vorkommen kleiner Divisoren auftritt, unter Anwendung der Form (80) zuerst bei Bestimmung der Integrationskonstanten zum Vorschein kommt; die Form (80) hat jedoch den Vortheil, dass die grossen Zahlen, die in (79) durch den Integrationsprozess erzeugt werden, und daselbst mit einem cosinus oder sinus multiplicirt sind, in (80) dagegen in Konstanten vorkommen, die nur für jeden halben Umlauf des Planeten abgeändert werden müssen.

Wir halten es jedoch für bequemer das Gyldénsche Argument erst nach der Integration einzuführen, wie dies auch bei der Berechnung der Thetis-Störungen geschehen ist.

Über die bei den verschiedenen Theilen einer Störungsrechnung zu beobachtende Genauigkeit.

23. Bevor wir zur numerischen Berechnung der Thetis-Störungen übergehen, werden wir einige Bemerkungen über die Genauigkeit vorausschicken, die man bei solchen Rechnungen überhaupt zu beobachten hat. Die Untersuchung wird in zwei Theile zerfallen: 1) Über die Genauigkeit, mit welcher man die Entwickelung der negativen ungeraden Potenzen der Entfernung zu kennen braucht, wenn die Fehler in den Störungsausdrücken unter einer gewissen im Voraus bestimmten Grenze liegen sollen; 2) Wie gross

[1]) In »*Grunddragen af en metod för beräkningen af absoluta störingar, med hufvudsakligt afseende på de små planeternas banor*». Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handl. 1874, p. 22 hat Gyldén Ausdrücke für die Integrationskonstanten gegeben, doch unter einer anderen Form als oben.

muss man die Zahl p (vergleiche p. 6 Formel (4)) wählen, um diese Genauigkeit in der Entwickelung der negativen Potenzen der Entfernung zu erreichen.

Es sind die Gleichungen (44), (46) und (50), welche uns die Lösung der ersteren dieser Aufgaben vermitteln. Bezeichne mit σ_1 den grössten Fehler, der in den Koefficienten der Entwickelung von $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ vorkommen darf, mit ϑ_1 den grössten Fehler, den σ_1 in den Störungen der mittleren Anomalie erzeugt.

Der grösste Faktor, mit welchem $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ multiplicirt werden kann, ist 3; bei Ausführung der doppelten Integration wird derselbe mit $(i - i'\mu)^2$ dividirt; mithin ist

$$\vartheta_1 = \frac{3}{[i - i'\mu]^2}\sigma_1$$

Wenn ϑ_1 gegeben ist, wird also σ_1 nach dieser Formel berechnet; es ist natürlich besonders in solchen Fällen von Wichtigkeit σ_1 zu berechnen, wo $i - i'\mu$ sehr klein ist; bei Thetis kommen Glieder vor, bei denen

$$i - i'\mu = \frac{1}{60},$$

und die Formel zeigt uns, dass die Fehler in solchen Gliedern in $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ bei der Integration 10800 Mal vergrössert werden.

Keine Glieder in $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ werden durch eine solche *doppelte* Integration vergrössert; nennt man den Fehler in $\mu a^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\sigma_3$, und den grössten entsprechenden Fehler in der mittleren Anomalie ϑ_3, so zeigt uns eine ähnliche Discussion, dass wenn wir nur die Glieder langer Periode betrachten

$$\vartheta_3 = \frac{2\left[1 - \frac{1}{a^2}\right]}{i - i'\mu}\sigma_3.$$

Nachdem wir also die grössten Fehler, die in den Koefficienten der Entwickelung von $\frac{a}{\Delta}$ und $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ vorkommen dürfen, bestimmt haben, bleibt uns noch die zweite Untersuchung übrig, nämlich zu bestimmen, wie gross man p wählen soll, wenn die Fehler in den besprochenen Koefficienten unter den Grenzen σ_1 und σ_3 liegen sollen.

24. Indem wir zu diesem Zwecke zu der früher gegebenen Entwickelung der Störungsfunktion zurückgehen, erinnern wir daran, dass die Koefficienten der Entwickelung (10) die Eigenschaft besassen, dass der n^{te} Koefficient alle Glieder von der n^{ten} Ordnung in Bezug auf die Excentricität enthielt. Wenn wir also von diesen Gliedern eine so grosse Anzahl n mitnehmen, dass das n^{te} Glied unter der Grenze σ liegt, so müssen auch

alle die folgenden Glieder, die vernachlässigt sind, unter derselbe Grenze σ fallen. Gesetzt also

$$(86) \qquad k_s\left(\frac{a}{\Delta}\right)^s = k_s[\Gamma_0 - 2\Gamma_1\cos(\varepsilon' - M) + \Gamma_2\cos 2(\varepsilon' - N)]^{-s_2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^{(s)} e^{\sqrt{-1}n\varepsilon'},$$

so werden wir n so gross wählen dass

$$B_n^{(s)} = \sigma$$

und dies für alle Werthe von $\varepsilon' - \varepsilon$ (da $B_n^{(s)}$ eine Funktion von diesem Argumente ist).

Da die Koefficienten $B_n^{(s)}$ elliptische Integrale sind, die man nicht leicht diskutieren kann, so werden wir dieselben in Reihen entwickeln, indem wir gleichzeitig einige erleichternde Veränderungen vornehmen. Da es nur von dem genäherten Werthe dieser Koefficienten die Rede ist, so bemerken wir zuerst, dass Γ_2, welche Grösse von der Ordnung des Quadrates der Excentricität ist, in (86) vernachlässigt werden kann, so dass mithin

$$(87) \qquad \left(\frac{a}{\Delta}\right)^s = [\Gamma_0 - 2\Gamma_1\cos(\varepsilon' - N)]^{-s_2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n^{(s)}\cos n(\varepsilon' - N)$$

ist.

Schreiben wir

$$(88) \qquad \frac{2\Gamma_1}{\Gamma_0} = \frac{2z}{1+z^2},$$

so wird mithin, weil $z < 1$,

$$k_s\left(\frac{a}{\Delta}\right)^s = k_s\left[\frac{1+z^2}{\Gamma_0}\right]^{s_2}[1 + z^2 - 2z\cos(\varepsilon' - N)]^{-s_2}$$

$$= k_s\left[\frac{1+z^2}{\Gamma_0}\right]^{s_2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tfrac{1}{2}b_{s_2}^{(n)}\cos n(\varepsilon' - N),$$

wo $b_{s_2}^{(n)}$ die schon früher besprochenen Laplaceschen Koefficienten sind. Für diese Koefficienten hat man bekanntlich folgende Reihenentwickelung

$$\tfrac{1}{2}b_{s/2}^{(n)} = \frac{s\,.\,s+2\,.\,s+4\ldots s+2n-2}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}\,.\,z^n\left\{1 + \frac{s(s+2n)}{2^2\,.\,1\,.\,(n+1)}z^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{s(s+2)\,.\,(s+2n)(s+2n+2)}{2^4\,.\,1\,.\,2\,.\,(n+1)(n+2)}z^4 + \ldots\right\}.$$

Diese Reihe können wir bei dieser Untersuchung auf ihr erstes Glied reduciren, und also nach (87) schreiben

$$(89) \qquad D_n^{(s)} = \frac{k_s}{\Gamma_0^{s_2}}\,\frac{s\,.\,s+2\,.\,s+4\ldots s+2n-2}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}\,.\,z^n,$$

wonach der grösste Werth von $n = n_s$ aus der Ungleichheit

$$\frac{k_s}{\Gamma_0^{s_2}} \cdot \frac{s \cdot s + 2 \cdot s + 4 \ldots s + 2n_s - 2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n_s} z^{n_s} < \sigma \tag{89*}$$

ohne Schwierigkeit bestimmt werden kann. Man muss sich nur erinnern, dass z eine Funktion von $\varepsilon' - \varepsilon$ ist, und dass man in (89*) den grössten Werth für z einsetzen soll. Nachdem n_s aus (89*) bestimmt ist, so erhält man, wie aus (4) leicht hervorgeht,

$$p = 2n_s , \tag{89**}$$

welche Formel die Zahl p, bei Anwendung der *Hansenschen* Methode zur Entwickelung der Störingsfunktion, giebt. Die Lösung der Ungleichheit (89*) muss im Allgemeinen in der Weise geschehen, dass man für n_s successive die Werthe 1, 2, 3 etc. einsetzt, bis man ein Resultat, das kleiner als σ ist, erhält. Eine obere Grenze für n_s, d. h. auch für p, kann man etwas einfacher sich auf folgende Weise verschaffen. Nach der Formel von WALLIS ist bekanntlich

$$\frac{1 \cdot 3 \ldots 2n - 1}{2 \cdot 4 \ldots 2n} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} - \lambda ,$$

wo λ eine *positive* Grösse, die mit $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergirt, bezeichnet.

Wenn wir in (89*) $s = 1$ setzen, so sieht man also, dass wenn n_1 so gewählt ist, dass

$$\frac{k_1}{\sqrt{\Gamma_0}} \frac{z^{n_1}}{\sqrt{n_1 \pi}} < \sigma , \tag{90}$$

so ist *a fortiori*

$$\frac{k_1}{\sqrt{\Gamma_0}} \frac{1 \cdot 3 \ldots 2n_1 - 1}{2 \cdot 4 \ldots 2n_1} \cdot z^{n_1} < \sigma .$$

Aus (90) bekommt man also immer eine obere Grenze für n_1; die Bedingung (90) kann auch unter der Form

$$n_1 \log z - \tfrac{1}{2} \log n_1 < \log \frac{\sigma}{k_1} \sqrt{\Gamma_0 \pi} \tag{90*}$$

geschrieben werden [1]).

[1]) In »*Annales de l'Observatoire de Paris*» Tome VII p. 189 hat PUISEUX eine ähnliche Formel zur Bestimmung von p gegeben. Da er aber von CAUCHYS Form der Entwickelung ausgeht, so werden immer die Werthe von p, die aus seiner Formel folgen, zu gross, und lassen sich nur in dem Falle benutzen, wo es von der Berechnung eines einzigen Gliedes in der Störungsfunktion die Rede ist. Die Formel ist auch zu diesem Zwecke von ihm aufgestellt.

Für $s = 3$ erhält man die analoge Formel

$$n_3 \log z + \tfrac{1}{2} \log n_3 < \log \frac{\omega \sqrt{\pi}\, I^3_0}{2k_3}. \tag{91}$$

Im Allgemeinen wählt man p zu gross. Wie wenig man in der That gewinnt, wenn man die Zahl p vergrössert, kann man aus dem folgenden, numerischen Beispiel sehen. Es waren in der folgenden Rechnung folgende 16 Werthe einer Funktion $Y(\omega)$ eines gewissen Winkels ω gegeben, die für Werthe von ω, die über den Umkreis gleichförmig vertheilt sind, gelten

— 0,58868,	— 0,49744,	— 0,48463,	— 0,53369,
— 0,69924,	— 0,90528,	— 1,14424,	— 1,37860,
— 1,56651,	— 1,67203,	— 1,67560,	— 1,57915,
— 1,40454,	— 1,18433,	— 0,95443,	— 0,74722,

wo $Y(0) = -0{,}58868$, $Y\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0{,}49744$ etc. Hier ist also $p = 16$. Schreiben wir

$$8\, Y(\omega) = \tfrac{1}{2} c_0 + c_1 \cos\omega + c_2 \cos 2\omega + \ldots + s_1 \sin\omega + s_2 \sin 2\omega + \ldots,$$

so geben die obigen Werthe von Y folgende Werthe für die Koefficienten c und s

$$p = 16$$

c_0	$= -17{,}03534$		
c_1	$= +3{,}90826$	s_1	$= +2{,}82625$
c_2	$= -0{,}10291$	s_2	$= -0{,}12289$
c_3	$= +0{,}00307$	s_3	$= +0{,}00521$
c_4	$= -0{,}00017$	s_4	$= -0{,}00042$
c_5	$= -0{,}00001$	s_5	$= +0{,}00069$

Würde man aber nur 8 von den Werthen von Y gekannt haben, und zwar diejenigen die $\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{4}$ etc. entsprechen, so würde man folgende Werthe derselben Koefficienten bekommen haben

$$p = 8$$

c_0	$= -17{,}03554$		
c_1	$= +3{,}90824$	s_1	$= +2{,}82632$
c_2	$= -0{,}10282$	s_2	$= -0{,}12292$
c_3	$= +0{,}00308$	s_3	$= +0{,}00512$
c_4	$= -0{,}00017$	s_4	$= 0{,}00000$

Der grösste Unterschied zwischen diesen Zahlen und den frühern beträgt nur 0,00042; und derselbe kommt nur in einem einzigen Koefficienten vor, nämlich s_4, den

man, wenn p gleich 8 ist, nicht bekommen kann. Wenn ein Fehler von 0,00042 zulässig ist, so gewinnt man mithin gar Nichts durch das Berechnen der Werthe $Y\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $Y\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ etc.

Bei der Berechnung der Thetis-Störungen ist es hinreichend, $p = 8$ zu setzen, ausser bei den Gliedern langer Periode, bei deren Berechnung es nothwendig ist, p den Werth 16 zu ertheilen.

Numerische Rechnung.

1.

Die folgenden Elemente der Thetis, die den Störungsrechnungen zu Grunde gelegt sind, habe ich direkt aus dem *Berliner Jahrbuch* für das Jahr 1885 genommen, nachdem Herr Prof. TIETGEN in Berlin gütigst dieselben hat untersuchen lassen, und hinreichend genau gefunden.

(17) Thetis.

Epoche und Oskulation 1883 Mars 14,0. Berl. M. Z.

$$\left.\begin{array}{rl} c = & 280°.27.26\overset{''}{,}2 \\ \pi = & 262.27.39\ ,5 \\ \theta = & 125.11.\ 6\ ,5 \\ i = & 5.36.39\ 6, \\ \varphi = & 7.29.\ 3\ ,0 \end{array}\right\} \text{Mittlere Äquin. und Ekliptik } 1880{,}0.$$

$$\log a = 0{,}393072.$$

Hierzu füge ich noch die Werthe von n und e

$$\log n = 2{,}960398$$
$$\log e = 9{,}114785.$$

2.

Die Jupiterelemente sind den *Leverrierschen* Tafeln in »*Annales de l'observatoire de Paris*» Tome XII entnommen. Dabei sind die beiden grossen Ungleichheiten langer Periode und die sekularen Glieder in den Jupiterstörungen berücksichtigt worden. Die Elemente sind für diselbe Epoche, wie die Thetis-Elemente berechnet, und auf dasselbe Äquinoctium reducirt.

Jupiter.

Epoche und Oskulation 1883 Mars 14,0. Berl. M. Z.

$$\left.\begin{array}{rl} c' = & 75°.24.18\overset{''}{,}2 \\ \pi = & 12.46.49\ ,0 \\ \theta' = & 99.12.40\ ,0 \\ i' = & 1.18.35\ ,0 \\ \varphi' = & 2.46.52\ ,9 \end{array}\right\} \text{Mittlere Äquin. und Ekliptik } 1880{,}0.$$

$$\log a = 0{,}716250$$

$$\log n = 2{,}475838$$
$$\log c' = 8{,}685963.$$

Für die Jupitersmasse habe ich folgenden Werth angewandt

$$m' = \frac{1}{1047,42}.$$

In Bezug auf diesen Werth mag Folgendes bemerkt werden. Nachdem der von NEWTON für die Jupitersmasse angenommene Werth $^1/_{1067}$, obgleich von *Laplace* bestätigt und eine grosse Wahrscheinlichkeit zugelegt[1]), durch die Untersuchungen von AIRY, ENCKE, BESSEL u. A. als unrichtig erkannt wurde, haben die neueren Bestimmungen alle viel grössere Werthe gegeben, die um $^1/_{1047}$ schwanken. Eine kleine Unsicherheit ist aber noch übrig, und zwar weichen besonders die Werthe, die man aus den Planetenbeobachtungen bekommt, von einander ab: wie aber LEVERRIER in seinen Untersuchungen über Saturn[2]) bemerkt, muss man indessen eine sehr lange Reihe Beobachtungen haben, bevor man aus den Planetenstörungen einen zuverlässigen Werth der störenden Masse bekommen kann. Desswegen habe ich einen mittleren Werth der mir bekannten Massenbestimmungen durch Beobachtungen der Satelliten angenommen. Wenn $m = \frac{1}{\mu_4}$, so ist nach

AIRY	$\mu_4 = 1046,77$	Sat. IV.	Gewicht	1.
BESSEL	1047,88	4 Sat.	»	2.
JACOB	1047,54	Sat. IV.	»	1.
SCHUR	1047,23	4 Sat.	»	2.
	Mittel 1047,42			
	$\log \mu_4$ 3,020121.			

Aus den angegebenen Werthen von n und n', erhält man

$$\mu = \frac{n'}{n} = 0,327672.$$

Aus diesem Werthe geht es hervor, dass die kleinsten Divisoren niedriger Ordnung $1 - 3\,\mu$, $2 - 6\,\mu$ etc. folgende Werthe haben:

$$1 - 3\,\mu = 0,016984$$
$$2 - 6\,\mu = 0,033968$$
$$3 - 9\,\mu = 0,050952$$

Um die übrigen kleinen Divisoren zu entdecken, entwickeln wir μ in Kettenbruch

$$\mu = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

Der nächste Divisor, der sehr klein ist, ist also

$$19 - 58\,\mu = -0,0050$$

und dann

$$58 - 177\,\mu = +0,0025,$$

die aber ohne Bedeutung sind.

[1]) *Exposition du système du Monde* p. 228.
[2]) *Annales de l'observatoire de Paris* Tome XII p. A. 69.

3.

Mittelst der Gaussischen Gleichungen (H. 107) [1]) finde ich

$$\begin{aligned} \Psi &= 33^\circ.\,19'.\,28'',5 \\ \Phi &= 7\,.\,22\,.\,43\,,5 \\ I &= 4\,.\,28\,.\,13\,,6 \\ \Pi &= 129\,.\,53\,.\,50 \\ \Pi &= 240\,.\,14\,.\,41\ ; \end{aligned}$$

dann aus den Formeln

$$\begin{aligned} k\cos K &= \cos I \sin \Pi, & k_1 \sin K_1 &= \sin \Pi \\ k \sin K &= \cos \Pi, & k_1 \cos K_1 &= \cos I \cos \Pi \\ A' &= k\cos(\Pi - K); & B' &= k_1 \sin(\Pi - K_1) \\ C' &= k \sin(\Pi - K) & D' &= k_1 \cos(\Pi - K_1) \\ A &= A', & B &= B' \cos\varphi, & C &= C' \cos\varphi, & D &= D' \cos\varphi \cos\varphi \end{aligned}$$

$$a = \frac{a'}{a}.$$

$$\begin{aligned} K &= 240^\circ.\,10\,.\,10 & \log k &= 9{,}999003 \\ K' &= 240\,.\,19\,.\,11 & \log k_1 &= 9{,}990675 \\ \log A &= 9{,}538682_n & \log B &= 9{,}970970_n \\ \log C &= 9{,}967516_n & \log D &= 9{,}538198_n \end{aligned}$$

$$\log a = 0{,}323178.$$

Mit Hülfe dieser Grössen berechne ich weiter aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} p \sin P &= 2a^2\frac{e'}{e} - 2a A \\ p \cos P &= 2a B \\ v \sin V &= 2a C \\ v \cos V &= 2a D. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \sin W &= p - 2a^2\frac{e'}{e}\sin P \\ w \cos W &= v \cos(V - P) \\ w_1 \sin W_1 &= v \sin(V - P) \\ w_1 \cos W_1 &= 2a^2\frac{e'}{e}\cos P. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 + a^2 - \tfrac{3}{2}a^2e^2 \\ \gamma_2 &= a^2e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 129^\circ.\,37'.\,19 & \log p &= 0{,}790550 \\ V &= 249\,.\,35\,.\,20 & \log v &= 0{,}619885 \\ W &= 119\,.\,49\,.\,21 & \log w &= 0{,}621791 \\ W_1 &= 120\,.\,14\,.\,24 & \log w_1 &= 0{,}621085 \end{aligned}$$

$$R_1 = 5{,}41387$$

$$\log \gamma_2 = 8{,}918282.$$

[1]) H. bedeutet Hansens: *»Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode etc.»*.

Endlich geben die Formeln

$$f \sin (F - P) = w \sin (\varepsilon + W) - ep$$
$$f \cos (F - P) = w_1 \cos (\varepsilon + W_1)$$
$$D = R_1 - 2e \cos \varepsilon + e^2 \cos^2 \varepsilon + e^2 f \cos F$$
$$\sin \psi = \frac{f}{D}; \quad \delta = \tan \tfrac{1}{2}\psi$$
$$A = D \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi; \quad \beta^2 = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2}\psi}{\cos \psi}$$

die folgenden Werthe von f, F, D, δ, A und β^2 für 8 Werthe von ε, die gleichförmig über den Umkreis vertheilt sind.

Tab. I.

ε	$F - \varepsilon$	$\log f$	$\log D$	δ	$\log A$	$\log \beta^2$
0	256°.17'.07"	0.547134	0,710098	0,397978	0,646244	9,274605
45	260 .29 .32	0,607640	0,728541	0,457846	0,645891	9.423601
90	258 .15 .26	0,664836	0,750771	0,522026	0,646113	9.573559
135	252 .13 .31	0,695455	0,764966	0,559341	0,646746	9,658313
180	245 .00 .20	0,691058	0,762828	0,553850	0,646636	9.645892
225	239 .26 .25	0,649881	0,744491	0,504454	0,646031	9,533181
270	239 .06 .30	0,583177	0,720523	0,432658	0,646003	9.362302
315	246 .24 .30	0,532299	0,706228	0,384532	0,646338	9,239356

4.

Diese Zahlen habe ich einer doppelten Kontrolle unterworfen. Zunächst berechne ich die Grössen k', K' etc. aus den folgenden Gleichungen (H. 149)

$$k' \sin K' = \cos I \sin \pi, \quad k'_1 \sin K'_1 = \sin \Pi$$
$$k' \cos K' = \cos \Pi \qquad k'_1 \cos K'_1 = \cos I \cos \Pi$$

$$p' \sin P' = 2\frac{e}{e'} - 2\alpha k' \cos (\Pi' - K')$$
$$p \cos P' = 2\alpha \cos \varphi k'_1 \sin (\Pi' - K'_1)$$
$$v \sin V' = 2\alpha \cos \varphi' k' \sin (\Pi' - K')$$
$$v \cos V' = 2\alpha \cos \varphi \cos \varphi' k'_1 \cos (\Pi' - K'_1)$$

$$w' \sin W' = p' - 2\frac{e}{e'} \sin P'$$
$$w \cos W' = v' \cos (V' - P')$$
$$w'_1 \sin W'_1 = v' \sin (V' - P')$$
$$w'_1 \cos W'_1 = 2\frac{e}{e'} \cos P'$$
$$R' = 1 + \alpha^2 - 2e^2;$$

welche geben

$$\begin{aligned} K &= 129°.58'.58'' & \log k' &= 9{,}999221 \\ K_1 &= 129\ .\ 48\ .\ 40 & \log k_1 &= 9{,}999457 \\ P' &= 60\ .\ 12\ .\ 45 & \log p' &= 0{,}985554 \\ V' &= 110\ .\ 15\ .\ 47 & \log v' &= 0{,}622920 \\ W' &= 49\ .\ 55\ .\ 35 & \log w' &= 0{,}621799 \\ W'_1 &= 50\ .\ 20\ .\ 35 & \log w'_1 &= 0{,}621071 \end{aligned}$$

$$R_1 = 5{,}39557.$$

Mit Hülfe dieser Zahlen habe ich dann die Werthe von $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ berechnet für die Fälle, wo $\varepsilon' = 200°$ med $\varepsilon = 0°$, $45°$ etc. gesetzt wird. Dabei kommen die folgenden Gleichungen zur Anwendung

$$\begin{aligned} f' \sin(F - P) &= W' \sin(\varepsilon' + W') - e'p' \\ f' \cos(F - P) &= W'_1 \cos(\varepsilon' + W'_1) \\ \gamma'_0 &= R' - 2a^2e' \cos\varepsilon' + a^2e'^2 \cos^2\varepsilon' + ef' \cos F' \\ \left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 &= \gamma'_0 - f' \cos(\varepsilon - F') + e^2 \cos^2\varepsilon. \end{aligned}$$

Gleichzeitig habe ich, für dieselben Werthe von ε' und ε, $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ aus der folgenden Gleichung hergeleitet

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = D - f' \cos(\varepsilon - F') + \tfrac{1}{2}\gamma_2 \cos 2\varepsilon'.$$

Die Resultate sind hier unten angegeben; die erste Zeile enthält die aus der letztern Formel erhaltenen Zahlen

ε	0	45	90	135	180	225	270	315
$\log\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$	0,502058	0,808788	0,980828	1,031202	0,966955	0,777367	0,453715	0,226047
Kontrolle...	0,502062	0,808786	0,980826	1,031197	0,966951	0,776364	0,453715	0,226051
Diff.	−4	+2	+2	+5	+4	+3	0	−4

Da aber diese Kontrolle zur Entdeckung möglicher Fehler in den Grössen Ψ, Φ, I, II und II' nicht führen kann, so habe ich, für $\varepsilon' = 200°$ $\varepsilon = 45°$, $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ auch nach den folgenden Formeln berechnet

$$\tan \tfrac{1}{2}v = \cot[45° - \tfrac{1}{2}\varphi] \tan \tfrac{1}{2}\varepsilon; \qquad \tan \tfrac{1}{2}v' = \cot[45° - \tfrac{1}{2}\varphi'] \tan \tfrac{1}{2}\varepsilon'$$

$$r = a(1 - e\cos\varepsilon) \qquad r' = a'(1 - e'\cos\varepsilon')$$

$$u = \pi - \theta + v \qquad u' = \pi' - \theta' + v'$$

$$\tan(\lambda - \theta) = \tan u \cos i \qquad \tan(\lambda - \theta) = \tan u' \cos i'$$

$$\tan\beta = \sin(\lambda - \theta)\tan i \qquad \tan\beta' = \sin(\lambda' - \theta')\tan i'$$

$$x = r\cos\beta\cos\lambda \qquad x' = r'\cos\beta'\cos\lambda'$$

$$y = r\cos\beta\sin\lambda \qquad y' = r'\cos\beta'\sin\lambda'$$

$$z = r\sin\beta \qquad z' = r'\sin\beta'$$

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Diese Formeln geben

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = 0{,}808790,$$

welche Zahl mit der früher erhaltenen übereinstimmt. Ich bin desswegen berechtigt anzunehmen, dass in der Berechnung von f, D, δ etc. kein merklicher Fehler sich eingeschlichen hat.

5.

Ich setze nun

$$[1 + \delta^2 - 2\delta\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}b_{\frac{1}{2}}^{(0)} + b_{\frac{1}{2}}^{(1)}\cos(\varepsilon' - F) + b_{\frac{1}{2}}^{(2)}\cos 2(\varepsilon' - F) + \ldots$$

$$[1 + \delta^2 - 2\delta\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}b_{\frac{3}{2}}^{(0)} + b_{\frac{3}{2}}^{(1)}\cos(\varepsilon' - F) + b_{\frac{3}{2}}^{(2)}\cos 2(\varepsilon' - F) + \ldots$$

und berechne die Koefficienten f aus RUNKLES Tafeln in *Smithsonian Contributions to Knowledge* Vol. IX, für die 8 in Tab. I erhaltenen Werthe von δ.

Tab. II. $\log \delta^{-i} b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$

i	$\varepsilon = 0$	45	90	135	180	225	270	315
0	0,315551	0,326198	0,334991	0,340821	0,339904	0,332329	0,323242	0,318230
1	0,02778	0,03774	0,05077	0,05966	0,05829	0,04693	0,03330	0,02579
2	9,90598	9,91710	9,93166	9,94160	9,94006	9,92736	9,91214	9,90377
3	9,828392	9,840107	9,855464	9,865960	9,864336	9,850934	9,834886	9,825066
4	9,7701	9,7834	9,7994	9,8101	9,8085	9,7946	9,7780	9,7690
5	9,7263	9,7386	9,7548	9,7658	9,7642	9,7500	9,7331	9,7238
6	9,6889	9,7014	9,7178	9,7292	9,7274	9,7130	9,6958	9,6864
7	9,6570	9,6697	9,6863	9,6978	9,6959	9,6815	9,6640	9,6546
8	9,629	9,642	9,659	9,670	9,668	9,654	9,636	9,627
9	9,605	9,618	9,635	9,646	9,644	9,630	9,612	9,602

Tab. III. $\log \delta^{1} - i\beta^{-4} b_{3/2}^{(i)}$

i	$\varepsilon = 0$	45	90	135	180	225	270	315
0	0,31806	0,32350	0,33016	0,33441	0,33376	0,32826	0,32113	0,31694
1	0,46825	0,46526	0,46149	0,45902	0,45940	0,46260	0,46658	0,46886
2	0,55645	0,54980	0,54188	0,53663	0,53742	0,54420	0,55255	0,55727
3	0,618264	0,610338	0,600160	0,593342	0,595831	0,604596	0,614555	0,619851
4	0,6665	0,6575	0,6459	0,6381	0,6393	0,6493	0,6615	0,6683
5	0,7060	0,6963	0,6837	0,6751	0,6765	0,6874	0,7006	0,7080
6	0,7398	0,7291	0,7158	0,7069	0,7082	0,7197	0,7338	0,7421
7	0,7684	0,7576	0,7414	0,7344	0,7359	0,7478	0,7624	0,7707
8	0,7949	0,7831	0,7661	0,7589	0,7603	0,7727	0,7883	0,7975
9	0,8175	0,8056	0,7882	0,7808	0,7823	0,7950	0,8105	0,8202

Die Tafeln könnten etwas bequemer aufgestellt werden, so dass man z.B. unmittelbar $b^{(i)}$ erhielte. Endlich muss bemerkt werden, dass die $b_{3/2}^{(i)}$ für $i = 6, 7, 8, 9$ nicht in den Runkleschen Tafeln in dem Falle, wo $\delta < 0.45$, zu finden sind; ich habe desswegen für $\delta > 0{,}38$ und $< 0{,}45$ durch Extrapolation eine 4-stellige Tafel für diese Koefficienten entworfen.

6.

Setzen wir nun

$$\frac{m'}{\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-1/2} = M^{(1)}$$

$$\frac{a^2 m'}{\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-3/2} = M^{(3)}$$

$$\frac{a^4 m'}{\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-5/2} = M^{(5)},$$

und schreiben die Entwickelung von $M^{(1)}$, $M^{(3)}$ und $M^{(5)}$ unter der Form

$$\tfrac{1}{4}M^{(n)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i^{(n)} \cos i(\varepsilon' - F) \qquad (n = 1, 3, 5),$$

so werden (p. 9) $\beta_i^{(1)}$ und $\beta_i^{(3)}$, aus den eben erhaltenen $b_{1/2}^{(i)}$ und $b_{3/2}^{(i)}$ mittelst der folgenden Gleichungen berechnet

$$\beta_i^{(1)} = \tfrac{1}{8}\mu_1 A^{-1/2} b_{1/2}^{(i)}$$

$$\beta_i^{(3)} = \tfrac{1}{8}a^2\mu_1 A^{-3/2} b_{3/2}^{(i)}$$

wo

$$\mu_1 = \frac{m'}{\sin 1''}.$$

Wir bemerken noch, dass A sehr nahe konstant ist, was eine frühere Bemerkung (p. 9) bestätigt.

Die so erhaltenen Werthe von β sind in den folgenden Tafeln enthalten

Tab. IV. $\log \beta_i^{(1)}$

i	$\varepsilon = 0$	45	90	135	180	225	270	315
0	1,387643	1,394467	1,403149	1,408662	1,407800	1,400528	1,391455	1,386275
1	0,69573	0,76673	0,83663	0,87518	0,86958	0,81796	0,73766	0,67877
2	0,17379	0,30681	0,43520	0,50480	0,49474	0,40121	0,25265	0,14168
3	9,696061	9,890533	0,076698	0,176832	0,162308	0,027599	9,811534	9,647907
4	9,2377	9,4946	9,7383	9,8687	9,8499	9,6741	9,3909	9,1767
5	8,7936	9,1104	9,4114	9,5721	9,5470	9,3323	8,9820	8,7165
6	8,3561	8,7340	9,0921	9,2831	9,2553	8,9981	8,5809	8,2640
7	7,9241	8,3630	8,7783	8,9993	8,9673	8,6694	8,1852	7,8171
8	7,496	7,996	8,468	8,720	8,683	8,345	7,794	7,374
9	7,072	7,632	8,162	8,443	8,403	8,023	7,405	6,934

Tab. V. $\log \beta_i^{(3)}$

i	$\varepsilon = 0$	45	90	135	180	225	270	315
0	1,53604	1,59656	1,67491	1,72778	1,71958	1,65186	1,56972	1,52398
1	1,28608	1,39904	1,52393	1,60007	1,58862	1,48902	1,35131	1,26083
2	0,97370	1,14430	1,32202	1,42536	1,41004	1,27345	1,07343	0,93418
3	0,635819	0,865556	1,097988	1,229742	1,211839	1,036661	0,771581	0,581694
4	0,2839	0,5734	0,8614	1,0222	0,9987	0,7842	0,4547	0,2151
5	9,9233	0,2729	0,6169	0,8069	0,7793	0,5251	0,1299	9,8397
6	9,5569	9,9664	0,3667	0,5864	0,5544	0,2602	9,7993	9,4588
7	9,1814	9,6557	0,1100	0,3615	0,3255	9,9912	9,4640	9,0723
8	8,8117	9,3420	9,8524	0,1337	0,0933	9,7189	9,1261	8,6840
9	8,4342	9,0251	9,5922	9,9033	9,8587	9,4440	8,7844	8,2917

Um diese Werthe zu kontrolliren setze ich

$$\varepsilon' - F = 0,$$

dann wird:

$$\tfrac{1}{4}M^{(1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_i^{(1)}$$

$$\tfrac{1}{4}M^{(3)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_i^{(3)},$$

deren rechte Seite aus den Tafeln IV und V, deren linke direkt berechnet werden muss.

Tab. VI. Kontrolle.

	$\varepsilon = 0$	45	90	135	180	225	270	315
$\frac{1}{4}\Sigma\beta_n^{(1)}$	19″,429	21,581	24,465	26,499	26,177	23,602	20.622	19,002
$\frac{1}{4}M^{(1)}$	19 ,430	21,585	24,477	26,530	26,207	23,611	20,623	19.004
Diff.	— 1	— 4	— 12	— 31	— 30	— 9	— 1	— 2

Tab. VII. Kontrolle.

	$\varepsilon = 0$	45	90	135	180	225	270	315
$\frac{1}{4}\Sigma\beta_i^{(3)}$	53″,60	73,41	106,71	135,38	130,65	95,95	64.09	50,17
$\frac{1}{4}M^{(3)}$	53 .62	73,51	107,20	136,51	131,58	96,22	64,12	50,17
Diff.	— 2	— 10	— 49	— 1,13	— 93	— 27	— 3	— 0

Die obigen Differenzen scheinen in einigen Fällen zu gross zu sein; man bemerkt aber leicht, dass dieselben nicht einen Rechenfehler andeuten. In der That, da alle Koefficienten $\beta_i^{(n)}$ positiv sind, so muss immer

$$\tfrac{1}{4}M^{(n)} > \sum \beta_i^{(n)},$$

da man nämlich nur eine endliche Zahl von β-Koefficienten berechnet hat. Daher kommt es, dass alle Differenzen in den obigen Tafeln negativ sind. Es ist leicht zu zeigen, dass alle die vorhandenen Differenzen ganz einfach dadurch erklärlich sind, dass wir nicht die $\beta_i^{(n)}$ für $i > 9$ berechnet haben. In der That ist es aus der Formel (8) ersichtlich, dass β_i von derselben Ordnung wie ϑ^i ist; mithin ist annähernd

$$\beta_{i+1} = \vartheta . \beta_i .$$

Nach diesem genäherten Gesetze kann man die Koefficienten β_{10}, β_{11} etc. berechnen, und dadurch ein Urtheil über die Genauigkeit der Rechnung bekommen. So wird z. B. für $\varepsilon = 135^0$ nach dieser Formel

$$\begin{aligned}\beta_{10} &= 0'',015\\ \beta_{11} &= 0\ ,009\\ \beta_{12} &= 0\ ,005\\ \beta_{13} &= 0\ ,003\\ \beta_{14} &= 0\ ,001\end{aligned}$$

und die Summe dieser Glieder 0″,033 ist, während Tab. VI eine Differenz von 0″,031 gab. In derselben Weise kann man sich überzeugen, dass die übrigen Differenzen auf keinen Rechenfehler hindeuten.

Dass man wirklich die Werthe von $\beta^{(i)}_{10}$, $\beta^{(i)}_{11}$ etc. nicht zu kennen braucht, habe ich mit Hülfe der p. 40—45 gegebenen Vorschriften untersucht.

7.

Nachdem die $\beta^{(1)}_i$ und $\beta^{(3)}_i$ mit Hülfe der Runkleschen Tafeln erhalten sind, berechne ich $\beta^{(5)}_i$ mittelst der folgenden Gleichungen (H. 157)

$$\beta^{(5)}_0 + \beta^{(5)}_1 = \frac{\alpha^2}{D-f}\left[\beta^{(3)}_0 + \tfrac{1}{3}\beta^{(3)}_1\right]$$

$$\beta^{(5)}_0 - \beta^{(5)}_1 = \frac{\alpha^2}{D+f}\left[\beta^{(3)}_0 - \tfrac{1}{3}\beta^{(3)}_1\right]$$

$$\beta^{(5)}_i = \beta^{(5)}_{i-2} - \frac{4\alpha^2}{3f}(i-1)\beta^{(3)}_{i-1}$$

Tab. VIII. $\log \beta^{(5)}_i$

i	$\varepsilon = 1$	45	90	135	180	225	270	315
0	1,80240	1,94852	2,13292	2,25492	2,23614	2,07917	1,88415	1,77280
1	1,69159	1,87013	2,07973	2,21313	2,19282	2,01997	1,79331	1,65325
2	1,49232	1,71841	1,96900	2,12202	2,09896	1,89883	1,62282	1,44177
3	1,24589	1,52518	1,82288	1,99971	1,97334	1,74083	1,40836	1,18191
4	0,9702	1,3054	1,6539	1,8644	1,8249	1,5569	1,1649	0,8922
5	0,6746	1,1023	1,4678	1,6972	1,6633	1,3592	0,9044	0,5821
6	0,3644	0,8153	1,2700	1,5443	1,4662	1,1427	0,6251	0,2572
7	0,0423	0,6589	1,0615	1,3469	1,3050	0,9253	0,3415	9,9181
8	9,7268	0,2827	0,8510	1,2003	1,1078	0,6829	0,0318	9,5742

Tab. IX. Kontrolle.

	$\varepsilon = 0$	45	90	135	180	225	270	315
$\Sigma\beta_s^{(i)}$	147″.4	250,0	459.3	681.4	638,0	385,0	198,2	132,1
$\frac{1}{4}M^{(5)}$	148 ,0	249,7	469,5	702,3	660,5	392,1	199.3	132,4
Diff.	— 0 ,6	+ 0,3	— 10,2	— 20,9	— 22,5	— 7,1	— 1.1	— 0,3

Ein paar kleinere Fehler werden durch die Kontrolle angedeutet; sie haben aber keine Bedeutung, da die Fehler in $\beta^{(5)}$ um ein Tausendstel verkleinert in $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ übergehen.

8.

Die Formel (p. 52)

$$\tfrac{1}{4}M^{(n)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_i^{(n)} \cos i(\varepsilon' - F')$$

schreiben wir nun unter der Form

$$\tfrac{1}{4}M^{(n)} = \sum \beta_i^{(n)} \cos i(F-\varepsilon) \cdot \cos i(\varepsilon'-\varepsilon) + \sum \beta_i^{(n)} \sin i(F-\varepsilon) \sin i(\varepsilon'-\varepsilon).$$

Setzen wir also

$$\tfrac{1}{4}\Upsilon_{i,\,c}^{(n)} = \beta_i^{(n)} \cos i(F-\varepsilon)$$
$$\tfrac{1}{4}\Upsilon_{i,\,s}^{(n)} = \beta_i^{(n)} \sin i(F-\varepsilon),$$

so sieht man gleich, dass die Υ-Funktionen nur von ε abhängen. Ihre Werthe für $\varepsilon = 0^0$, 45^0, etc. bezeichnen wir mit Υ_0, $\Upsilon_1 \ldots \Upsilon_7$. Indem wir der Entwickelung von Υ die Form

$$\Upsilon = \sum_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2}[c_n \cos n\varepsilon + s_n \sin n\varepsilon]$$

geben, so erhalten wir mit Hülfe der Formel (3), zur Bestimmung der Koefficienten in dieser Entwickelung, die folgenden Gleichungen

$$\sum_{r=0}^{7} \frac{1}{4}\Upsilon_r = c_0 + c_8 + c_8 + \ldots$$
$$\sum \frac{1}{4}\Upsilon_r \cos\frac{r\pi}{4} = c_1 + c_7 + c_9 + \ldots$$
$$\sum \frac{1}{4}\Upsilon_r \cos\frac{r\pi}{2} = c_2 + c_6 + c_{10} + \ldots$$
$$\sum \frac{1}{4}\Upsilon_r \cos\frac{r3\pi}{4} = c_3 + c_5 + c_{11} + \ldots$$

$$\sum_1^4 Y_r \cos r\pi = 2c_4 + 0 + c_{12} + \ldots$$
$$\sum_1^4 Y_r \sin \frac{r\pi}{4} = s_1 + s_7 + s_9 + \ldots$$
$$\sum_1^4 Y_r \sin \frac{r\pi}{2} = s_2 + s_6 + s_{10} + \ldots$$
$$\sum_1^4 Y_r \sin \frac{r3\pi}{4} = s_3 + s_5 + s_{11} + \ldots$$
$$0 = 2s_4 + 0 + s_{12} + \ldots$$

Wenn wir also berechtigt sind s_4, s_5 etc., c_5, c_6 etc. gleich Null zu setzen, so können wir aus diesen Gleichungen die übrigen Koefficienten berechnen. Um diese Berechnung zu machen setzen wir

$$(0.4) = Y_0 + Y_4 \qquad \binom{0}{4} = Y_0 - Y_4$$
$$(1.5) = Y_1 + Y_5 \qquad \binom{1}{5} = Y_1 - Y_5$$
$$(2.6) = Y_2 + Y_6 \qquad \binom{2}{6} = Y_2 - Y_6$$
$$(3.7) = Y_3 + Y_7 \qquad \binom{3}{7} = Y_3 - Y_7$$
$$(0.2) = (0.4) + (2.6)$$
$$(1.3) = (1.5) + (3.7)$$
$$\binom{0}{2} = (0.4) - (2.6)$$
$$\binom{1}{3} = (1.5) - (3.7);$$

dann wird

$$2(c_0 + 2c_4) = (0.2) \qquad 2(c_1 + c_3) = \binom{0}{4}$$
$$2(c_0 - 2c_4) = (1.3) \qquad 2(c_1 - c_3) = \left[\binom{1}{5} - \binom{3}{7}\right] \cos 45°$$
$$4c_2 = (0.4) - (2.6) \qquad 2(s_1 + s_3) = \left[\binom{1}{5} + \binom{3}{7}\right] \cos 45°$$
$$4s_2 = (1.5) - (3.7) \qquad 2(s_1 - s_3) = \binom{2}{6}.$$

Die Rechnung kann am bequemsten nach dem folgenden Schema ausgeführt werden

Y_0	Y_1	Y_2	Y_3
Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
(0.4)	(1.5)		$c_2 = \binom{0}{2}$
(2.6)	(3.7)		$s_2 = \binom{1}{3}$
(0.2)			
(1.3)			
$c_0 =$ Summe			
$2c_4 =$ Diff.			
$\binom{0}{4}$	$\binom{1}{5}$	$\binom{2}{6}$	
$D \cos 45$	$\binom{3}{7}$	$S \cos 45$	
$c_1 =$ Summe	$D =$ Diff.	$s_1 =$ Summe	
$c_3 =$ Diff.	$S =$ Summe	$s_3 = -$ Diff.	
	$\log D$		
	$\log S$		

Die Rechnung ist eine sehr angenehme, und erfordert nur einige Minuten. Mit Anwendung dieses Schemas habe ich für die Koefficienten in der Entwickelung der verschieden Y folgende Werthe erhalten.

Tab. X. $M^{(1)}$

	$Y^{(1)}_{0,\,c}$		$Y^{(1)}_{1,\,c}$		$Y^{(1)}_{1,\,s}$		$Y^{(1)}_{2,\,c}$		$Y^{(1)}_{2,\,s}$	
	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s
0	− 199.″8319	——	− 17″,018	——	− 45′.886	——	− 13″,355	—	+ 11″,480	——
1	− 2 ,3168	+ 1,3360	− 3 ,903	+ 2.822	+ 3 ,777	− 4.060	+ 1 ,367	− 3,321	− 3 ,392	− 0,989
2	+ 0 ,0573	− 0,0120	− 0 ,102	− 0,109	− 0 ,123	+ 0,091	+ 0 ,006	+ 0,411	− 0 ,416	− 0,010
3	− 0 ,0030	− 0,0082	+ 0 ,002	+ 0,004	+ 0 ,005	0,000	+ 0 ,011	− 0,015	− 0 ,016	− 0,005
4	+ 0 ,0033	0,0000	0 ,000	0,000	0 ,000	0,000	− 0 ,002	0,000	0 ,000	0,000

	$Y^{(1)}_{3,\,c}$		$Y^{(1)}_{3,\,s}$		$Y^{(1)}_{4,\,c}$		$Y^{(1)}_{4,\,s}$		$Y^{(1)}_{5,\,s}$	
	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s
0	− 6″,12706	——	+ 3″,39075	——	+ 0″,436	——	− 2″,886	——	+ 1″.220	——
1	− 2 ,12281	+ 0.10545	− 0 ,02841	+ 2,04069	+ 0 ,404	+ 1,031	+ 1 ,090	− 0,437	+ 0 ,463	− 0.408
2	+ 0 ,39466	0,18856	− 0 ,19387	− 0,39254	− 0 ,262	− 0.234	− 0 ,234	+ 0.258	− 0 ,085	+ 0,227
3	− 0 ,03067	+ 0,02369	+ 0 ,02345	+ 0,03093	+ 0 ,040	+ 0,011	+ 0 ,020	− 0,047	− 0 ,003	− 0,050
4	+ 0 ,00241	0,00000	− 0 ,00044	0,00000	− 0 ,004	0,000	− 0 ,001	0,000	+ 0 ,003	0,000

	$Y^{(1)}_{6,\,c}$		$Y^{(1)}_{6,\,s}$		$Y^{(1)}_{7,\,c}$		$Y^{(1)}_{7,\,s}$	
	c	s	c	s	c	s	c	s
0	+ 0″,2837	——	− 0″,4606	——	+ 0″,145	——	− 0″,190	——
1	− 0 ,2787	− 0,1311	− 0 ,1533	+ 0,2782	− 0 ,023	+ 0,157	+ 0 .161	− 0,118
2	+ 0 ,1614	+ 0,0005	− 0 ,0004	− 0.1556	− 0 ,034	− 0,089	− 0 ,089	+ 0,033
3	− 0 ,0391	+ 0,0063	+ 0 ,0181	+ 0,0382	+ 0 ,023	+ 0,021	+ 0 ,021	− 0,022
4	+ 0 ,0025	0,0000	− 0 .0047	0,0000	− 0 ,006	0,000	− 0 ,002	0,000

	$Y^{(1)}_{8,\,c}$		$Y^{(1)}_{8,\,s}$		$Y^{(1)}_{9,\,c}$		$Y^{(1)}_{9,\,s}$	
	c	s	c	s	c	s	c	s
0	0″,105	——	− 0″,031	——	+ 0″,004	——	+ 0″,049	——
1	+ 0 ,077	− 0,022	− 0 ,019	− 0,079	− 0 ,023	− 0,034	− 0 .034	+ 0,022
2	− 0 ,042	+ 0,031	− 0 ,037	+ 0,042	+ 0 ,006	+ 0,016	+ 0 .015	− 0,028
3	+ 0 ,011	+ 0,022	− 0 ,021	− 0,009	− 0 .015	0,000	0 ,000	− 0,014
4	+ 0 ,002	0,000	+ 0 ,006	0,000	+ 0 ,004	0,000	− 0 ,001	0,000

Tab. XI. $M^{(3)}$

	$Y^{(3)}_{0,c}$		$Y^{(3)}_{1,c}$		$Y^{(3)}_{1,s}$		$Y^{(3)}_{2,c}$		$Y^{(3)}_{2,s}$	
	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s
0	+ 342″,428	—	— 78″,565	—	— 211″,786	—	— 99″,484	—	+ 85″,579	—
1	— 36 ,014	+ 20,533	+ 23 ,398	— 9,452	+ 32 ,671	— 27,149	+ 16 ,455	— 27,754	— 30 ,263	— 3,989
2	+ 2 ,353	— 2,491	— 2 ,638	— 0,365	— 1 ,935	+ 3,361	— 0 ,029	+ 5,261	+ 5 ,215	— 0,810
3	— 0 ,128	+ 0,181	+ 0 ,212	— 0,006	+ 0 ,081	— 0,259	— 0 ,107	— 0,448	— 0 ,463	+ 0,151
4	+ 0 ,011	0,000	— 0 ,013	0,000	— 0 ,012	0,000	+ 0 ,009	0,000	+ 0 ,025	0,000

	$Y^{(3)}_{3,c}$		$Y^{(3)}_{3,s}$		$Y^{(3)}_{4,c}$		$Y^{(3)}_{4,s}$		$Y^{(3)}_{5,c}$	
	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s
0	+ 63″,30325	—	+ 34″,95844	—	+ 5″,753	—	— 38″,135	—	— 19″,761	—
1	— 25 ,17611	+ 3,18886	— 2 ,45062	+ 21,57567	+ 4 ,714	+ 13,413	+ 16 ,148	— 6,807	+ 8 ,353	— 6,948
2	+ 5 ,44347	— 2,83614	— 2 ,48465	— 5,26611	— 4 ,005	— 3,580	— 3 ,702	+ 4,127	— 1 ,594	+ 4,107
3	— 0 ,59623	+ 0,53906	+ 0 ,53118	+ 0,55181	+ 0 ,956	+ 0,345	+ 0 ,346	— 0,929	— 0 ,053	— 1,040
4	+ 0 ,05552	0,00000	— 0 ,04325	0,00000	— 0 ,113	0,000	— 0 ,010	0,000	+ 0 ,053	0,000

	$Y^{(3)}_{5,s}$		$Y^{(3)}_{6,c}$		$Y^{(3)}_{6,s}$		$Y^{(3)}_{7,c}$		$Y^{(3)}_{7,s}$	
	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s
0	+ 4″,275	—	+ 5″,511	—	+ 8″,828	—	+ 3″,235	—	— 4″,230	—
1	— 6 ,285	— 6,687	— 5 ,388	— 2,397	— 3 ,299	+ 5,363	— 0 ,674	+ 3,459	+ 3 ,622	— 0,274
2	+ 4 ,227	+ 1,516	+ 3 ,206	— 0,053	+ 0 ,018	— 3,206	— 0 ,767	— 2,060	— 2 ,064	+ 0,780
3	— 0 ,917	+ 0,045	— 0 ,914	+ 0,413	+ 0 ,425	+ 0,861	+ 0 ,604	+ 0,543	+ 0 ,542	— 0,546
4	+ 0 ,226	0,000	+ 0 ,148	0,000	— 0 ,130	0,000	— 0 ,174	0,000	— 0 ,069	—

	$Y^{(3)}_{8,c}$		$Y^{(3)}_{8,s}$		$Y^{(3)}_{9,c}$		$Y^{(3)}_{9,s}$	
	c	s	c	s	c	s	c	s
0	— 2″,583	—	— 0″,803	—	+ 0′,081	—	+ 1″,364	—
1	+ 2 ,066	— 0,527	— 0 ,366	— 1,905	— 0 ,603	— 0,908	— 1 ,005	+ 0,657
2	— 1 ,086	+ 0,951	+ 0 ,950	+ 1,075	+ 0 ,809	+ 0,434	+ 0 ,429	— 0,803
3	+ 0 ,220	— 0,533	— 0 ,600	— 0,239	— 0 ,465	— 0,034	+ 0 ,013	+ 0,407
4	+ 0 ,003	0,000	+ 0 ,177	0,000	+ 0 ,134	0,000	— 0 ,058	0,000

Tab. XII. $M^{(5)}$

	$Y^{(5)}_{0,c}$	$Y^{(5)}_{0,s}$	$Y^{(5)}_{1,c}$	$Y^{(5)}_{1,s}$	$Y^{(5)}_{2,c}$	$Y^{(5)}_{2,s}$
	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s
0	+ 895″,9	——	— 267″,2	——	720″,0	——	— 427″,5	——	+ 368.2	——
1	— 216 .2	+ 122.3	+ 105 .7	+ 13.9	— 186 .4	— 133,1	+ 108 .2	— 136,1	— 158,8	+ 3,1
2	+ 23 .2	— 30,5	— 21 .2	+ 2,4	— 18 .1	— 33,5	— 3 .1	+ 38.8	+ 36,4	— 10,8
3	— 1 .4	+ 3,9	+ 2 .7	— 1,0	+ 0 .7	— 4.5	— 1 .8	— 5,1	— 5,0	+ 2,9
4	0 .0	0 ,0	— 0 ,3	0,0	0 ,0	0,0	+ 0 .5	0,0	+ 0,5	0,0

	$Y^{(5)}_{3,c}$	$Y^{(5)}_{3,s}$	$Y^{(5)}_{4,c}$	$Y^{(5)}_{4,s}$	$Y^{(5)}_{5,c}$
	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s
0	+ 331″,9	——	+ 183″.2	——	+ 36″,2	——	— 238″,7	——	— 143,6	——
1	— 152 .7	+ 31,3	— 30 .0	— 111.3	+ 24 .7	— 80,9	+ 114 .3	— 51,3	+ 67,0	— 53,7
2	+ 38 .2	— 23,5	— 15 .5	— 36.6	— 28 .9	— 26,5	— 28 .2	+ 34.1	— 14.0	+ 33.4
3	— 5 .3	+ 5.7	+ 8 .0	— 5,1	+ 9 .3	— 3.1	+ 2 .1	— 9,7	— 0,3	— 10,4
4	+ 0 .2	0,0	— 0 .9	— 0,0	— 1 .6	0,0	+ 0 .6	0,0	+ 1.1	0,0

	$Y^{(5)}_{5,s}$	$Y^{(5)}_{6,c}$	$Y^{(5)}_{6,s}$	$Y^{(5)}_{7,c}$	$Y^{(5)}_{7,s}$
	c	s	c	s	c	s	c	s	c	s
0	+ 29″.2	——	+ 45″.7	——	+ 74″.2	—	+ 32″.0	——	— 39″.0	——
1	— 46 .6	— 44.9	— 45 .4	— 16.7	— 31 .5	+ 45.4	— 7 .2	+ 31.8	+ 34 .6	+ 1.3
2	— 32 .7	+ 11.0	— 28 .4	— 1,1	— 0 .4	— 30,0	— 7 .2	— 19,0	— 20 .0	+ 8.2
3	— 9 .7	+ 0,1	— 8 .2	+ 4.1	— 5 .5	+ 9.4	— 5 .8	+ 6,4	+ 5 .4	— 5.5
4	— 2 .0	0,0	— 1 .1	0,0	— 2 .3	0,0	— 2 .5	——	— 0 .9	0,0

	$Y^{(5)}_{8,c}$	$Y^{(5)}_{8,s}$
	c	s	c	s
0	— 27″.7	——	— 9″.7	——
1	+ 22 .3	— 6.9	2 .5	19.5
2	— 11 .3	+ 11.4	— 10 .0	— 11.7
3	+ 1 .3	— 6.7	— 7 .3	— 3.3
4	— 0 .7	0.0	+ 2 .6	0.0

Es ist nicht schwer, eine Kontrolle für diese Rechnungen zu finden; wir werden aber zuerst die obigen Entwickelungen in eine andere Form transformiren, bemerken nur verläufig, dass die Kleinheit des letzten Gliedes c_4 schon eine Garantie für die Richtigkeit des Resultates ist.

9.

Nachdem wir also für Y_c und Y_s die Entwickelung nach den Vielfachen von ε erhalten haben, nämlich

$$Y^{(n)}_{i,\,c} = \tfrac{1}{2}C^{(n)\,.\,c}_{i\,.\,0} + C^{(n)\,.\,c}_{i\,.\,1}\cos\varepsilon + C^{(n)\,.\,c}_{i\,.\,2}\cos 2\varepsilon + \ldots + C^{(n)\,.\,s}_{i\,.\,1}\sin\varepsilon + C^{(n)\,.\,s}_{i\,.\,2}\sin 2\varepsilon + \ldots$$

$$Y^{(n)}_{i\,.\,c} = \tfrac{1}{2}S^{(n)\,.\,c}_{i\,.\,0} + S^{(n)\,.\,c}_{i\,.\,1}\cos\varepsilon + S^{(n)\,.\,c}_{i\,.\,2}\cos 2\varepsilon + \ldots + S^{(n)\,.\,s}_{i\,.\,1}\sin\varepsilon + S^{(n)\,.\,s}_{i\,.\,2}\sin 2\varepsilon + \ldots$$

so bringen wir den Ausdruck für $M^{(n)}$ p. 56, auf die folgende für Rechnung beguemere Form

$$M^{(n)} = \sum\sum C_{i,i'}\cos(i\varepsilon - i'\varepsilon') + \sum\sum S_{i,i'}\sin(i\varepsilon - i'\varepsilon'),$$

wo i und i' ganze Zahlen sind, von denen i' nie negativ wird. Die Reihen, die ich so erhielt, sind in den folgenden Tafeln enthalten.

Tab. XIII.

$\varepsilon, \varepsilon'$	$M^{(1)}$		$M^{(3)}$		$M^{(5)}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 0	− ½199″,8319	——	+ ½342″,428	——	+ ½895,9	——
1 — 0	— 2 ,3168	+ 1,3360	— 36 ,014	+ 20,533	— 216,2	+ 122,3
2 — 0	+ 0 ,057	— 0,012	+ 2 ,55	— 2,49	+ 23,2	— 30,5
3 — 0	— 0 ,003	— 0,008	— 0 ,13	+ 0,18	— 1,4	+ 3,9
— 2 — 1	——	——	+ 0 ,47	— 0,07	+ 7,2	— 0,3
— 1 — 1	— 0 ,193	+ 0,232	— 6 ,00	+ 2,30	— 54,6	+ 15,7
0 — 1	+ 7 ,963	— 6,599	+ 50 ,55	— 42,12	+ 238,8	— 200,3
1 — 1	— 17 ,018	+ 45,886	— 78 ,56	+ 211,79	— 267,2	+ 720,0
2 — 1	— 0 ,157	— 0,955	— 3 ,75	— 23,22	— 27,4	— 172,5
3 — 1	— 0 ,011	+ 0,014	+ 0 ,72	+ 1,57	+ 12,3	+ 20,5
4 — 1	——	——	— 0 ,05	— 0,09	— 1,8	— 1,7
— 1 — 2	+ 0 ,016	+ 0,031	— 0 ,26	+ 0,91	— 4,7	+ 10,1
0 — 2	+ 0 ,016	— 0,827	+ 0 ,78	— 10,47	— 7,7	— 75,2
1 — 2	+ 2 ,356	+ 6,713	+ 20 ,44	+ 58,01	+ 105,1	+ 294,9
2 — 2	— 13 ,355	— 11,480	— 99 ,48	— 85,58	— 427,5	— 368,2
3 — 2	+ 0 ,378	+ 0,070	+ 12 ,46	+ 2,51	+ 111,3	+ 22,7
4 — 2	——	——	— 0 ,84	+ 0,05	— 13,9	+ 2,4

$\varepsilon, \varepsilon'$	$M^{(1)}$		$M^{(3)}$		$M^{(5)}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 3	— 0″,06160	— 0,04712	— 1″.14804	— 1,07024	— 10,4	— 13,7
1 — 3	+ 0 ,78720	+ 0,38243	+ 10 ,70958	+ 5,32079	+ 74,8	+ 39,0
2 — 3	— 4 ,16350	— 0,07704	— 46 ,75178	— 0,72924	— 264,0	— 1,3
3 — 3	+ 6 .1271	— 3,3907	— 63 .303	— 34,958	+ 331,9	— 183,2
4 — 3	— 0 ,0821	+ 0,1339	— 3 ,600	+ 5,648	— 41,4	+ 61,3
5 — 3	+ 0 .0021	+ 0,0053	+ 0 .177	— 0,352	+ 1,6	— 8,0
1 — 4	+ 0 ,087	— 0,031	+ 1 .88	— 0,69	+ 19,0	— 5,2
2 — 4	— 0 ,520	+ 0,468	— 8 .13	+ 7,28	— 63,0	+ 54,7
3 — 4	+ 0 ,841	— 2.121	+ 11 ,52	— 29,56	+ 76,0	— 195,2
4 — 4	+ 0 ,436	+ 2,886	+ 5 .75	+ 38,13	+ 36,0	+ 238,7
5 — 4	— 0 ,033	— 0,059	— 2 .09	+ 2,73	— 26,6	— 33,4
6 — 4	— 0 ,011	— 0,009	+ 0 .12	+ 0,12	——	——
2 — 5	— 0 .015	+ 0.100	— 0 .10	+ 1.96	— 0,4	+ 20,0
3 — 5	— 0 ,172	— 0,454	— 3 .11	— 8,33	24,5	— 66,0
4 — 5	+ 0 .911	+ 0.808	+ 15 ,94	+ 13,23	+ 111,8	+ 100,2
5 — 5	— 1 ,220	— 0,252	— 19 .76	— 4,27	— 143.6	— 29.2
6 — 5	+ 0 ,015	— 0,008	+ 1 ,67	— 0,66	+ 22.1	— 7.1
7 — 5	——	——	— 0 .08	— 0,12	——	——
3 — 6	— 0 ,077	— 0.024	— 1 .775	— 0.858	— 17,6	— 9,6
4 — 6	+ 0 ,317	0.000	+ 6 .412	— 0,071	+ 58,4	+ 0.7
5 — 6	— 0 ,557	+ 0,284	— 10 .751	+ 5.696	— 90,8	+ 48.2
6 — 6	+ 0 ,284	— 0,461	+ 5 .511	— 8,828	+ 45.7	— 74.2
7 — 6	0 ,000	+ 0.022	— 0 ,025	+ 0,902	0.0	+ 14,8
4 — 7	+ 0 ,045	— 0,042	+ 1 ,15	— 1.08	+ 11,3	— 11,8
5 — 7	— 0 ,067	+ 0,178	— 1 .55	+ 4.12	— 15.4	+ 39,0
6 — 7	— 0 ,041	— 0,318	— 0 .95	— 7,08	— 8,5	— 66.4
7 — 7	+ 0 ,145	+ 0,190	+ 3 ,23	+ 4.23	+ 32.0	+ 39.0
8 — 7	— 0 ,041	— 0.004	— 0 ,40	— 0.16	— 5.9	— 2,8
5 — 8	— 0 ,020	— 0,043	+ 0 ,46	+ 1.13	+ 4.6	+ 14,0
6 — 8	— 0 ,084	— 0,068	— 2 .16	— 1 90	— 23,0	— 21.4
7 — 8	+ 0 ,156	+ 0,041	+ 3 ,97	+ 0.89	+ 41,8	+ 9.4
8 — 8	— 0 ,105	+ 0,031	— 2 ,58	+ 0,80	— 27,7	+ 9.7
9 — 8	— 0 ,002	— 0,003	+ 0 .16	— 0,16	——	——
6 — 9	— 0 ,029	0,000	— 0 ,97	— 0.02	——	——
7 — 9	+ 0 ,034	— 0,031	+ 1 .61	— 0,86	——	——
8 — 9	— 0 ,045	— 0.068	— 1 .26	+ 1.91	——	——
9 — 9	+ 0 .004	— 0,049	+ 0 ,08	— 1,36	——	——

Eine sehr gute Kontrolle, so wohl der letzten Transformation, wie der ganzen mechanischen Qvadratur (d. h. der Tafeln X, XI, XII) wird gewonnen, indem wir aus der obigen Tafel XIII für $\varepsilon = 0$ $M^{(1)}$, $M^{(3)}$ und $M^{(5)}$ berechnen, was einfach dadurch geschieht, dass wir die Summe der Zahlen in jeder Abtheilung [d. h. die Summe aller Glieder mit demselben Index i] nehmen; die so erhaltene Reihe

$$M^{(n)} = a_0 + a_1 \cos(-\varepsilon') + a_2 \cos(-2\varepsilon') + \ldots + b_1 \sin(-\varepsilon') + b_2 \sin(-2\varepsilon') + \ldots$$

muss mit derjenigen identisch sein, welche man erhält, wenn man in

$$M^{(n)} = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} 4\beta_i^{(n)} \cos i(\varepsilon' - F)$$

$\varepsilon = 0$ setzt; d. h. wir haben

$$a_i = 8\beta_i^{(n)} \cos iF$$
$$b_i = -8\beta_i^{(n)} \sin iF$$
$$a_0 = 4\beta_0^{(n)},$$

wo $F = 256^0.17'.07''$ (Tab. I), und die $\beta_i^{(n)}$ aus den Tafeln IV, V, VIII zu nehmen sind. Durch Zusammenlegung der verschiedenen Abtheilungen in XIII erhält man

Tab. XIV. $\varepsilon = 0$.

$-i'$	$M^{(1)}$		$M^{(3)}$		$M^{(5)}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0	+ ½195″,307		+ ½274″,85		+ ½507″,0	
1	— 9 ,406	+ 38,578	— 36 ,57	+ 150,31	— 92 ,7	+ 381,4
2	— 10 ,589	— 5,493	— 66 ,86	— 34,62	— 222 ,0	— 113,3
3	+ 2 ,608	— 29,933	+ 22 ,65	— 26,13	+ 92 ,5	— 105,9
4	+ 0 ,800	+ 1,134	+ 8 ,93	+ 12,43	+ 41 ,4	+ 59.6
5	— 0 ,470	+ 0,194	— 6 ,26	+ 1,69	— 34 ,6	+ 18,0
6	— 0 ,033	— 0,178	— 0 ,63	— 3,14	— 4 ,3	— 20,1
7	+ 0 ,044	+ 0,022	+ 1 ,48	+ 0,03	+ 13 ,5	— 3,0
8	— 0 ,015	+ 0,042	— 0 ,15	+ 0,76	— 4 ,3	+ 11,7
9	— 0 ,058	— 0,012	— 0 ,54	— 0,33	——	——

und mit Hülfe der Tafeln I, IV, V, VIII bekommt man zur Kontrolle:

Tab. XV. Kontrolle.

	$M^{(1)}$		$M^{(3)}$		$M^{(5)}$	
$-i'$	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0	+ ½195″,314		− ½274″.87		+ ½507″,2	
1	— 9 ,413	+ 38,568	— 36 ,65	+ 150,17	— 93 .2	+ 382,0
2	— 10 ,592	— 5.496	— 66 ,85	— 34.60	— 220 ,0	— 114.4
3	+ 2 .614	— 29,922	+ 22 ,76	— 26,04	— 92 ,8	— 106,4
4	+ 0 ,792	+ 1,136	+ 8 .88	+ 12.57	+ 43 .2	+ 60,8
5	— 0 ,464	+ 0.184	— 6 ,04	+ 1.22	— 35 .2	+ 13.6
6	— 0 ,024	— 0,180	— 0 ,38	— 2.86	— 2 ,4	— 18.4
7	+ 0 ,064	+ 0,008	+ 1 .20	+ 0,13	+ 8 ,8	+ 0,8
8	— 0 ,008	+ 0,024	— 0 ,18	+ 0,48	— 1 ,6	+ 4.0
9	— 0 .058	— 0,008	— 0. 18	— 0,12	——	——

Da ich nur eine Genauigkeit von einer Bogensekunde in den Ausdrücken für die Störungen beabsichtige, so ist diese Übereinstimmung eine sehr befriedigende. Die Differenzen zwischen den Zahlen in Tab. XIV und XV entstehen übrigens nicht aus Rechenfehlern, sondern kommen von den in XIII vernachlässigten Gliedern.

10.

Aus $M^{(1)}$, $M^{(3)}$, $M^{(5)}$ erhält man die negativen Potenzen des Abstandes zwischen den Planeten durch die folgenden Formeln

$$\mu_1\left(\frac{a}{\Delta}\right) = M^{(1)} - \frac{\gamma_2}{4a^2}\cos 2\varepsilon' \cdot M^{(3)}$$

$$\mu_1 a^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 = M^{(3)} - \frac{3\gamma_2}{4a^2}\cos 2\varepsilon' M^{(5)},$$

oder durch Zahlen ausgedrückt

$$\mu_1\left(\frac{a}{\Delta}\right) = M^{(1)} - 0{,}000294\ 2\cos 2\varepsilon' \cdot M^{(3)}$$

$$\mu_1\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 = M^{(3)} - 0{,}000882\ 2\cos 2\varepsilon' \cdot M^{(5)}.$$

Die zweiten Glieder dieser Gleichungen können nicht sehr gross werden. Ihre höchsten Werthe betragen nur 0″.101 und 0″.790 resp., und kommen bei dem Argumente $-2\varepsilon'$ vor. Die Ausführung der obigen Multiplikationen habe ich mit Hülfe der *Crelleschen* Tafel gemacht.

Tab. XVI.

$\varepsilon, \varepsilon'$	$u\left(\frac{a}{J}\right)$ cos.	$u\left(\frac{a}{J}\right)$ sin.	$\mu a^2\left(\frac{a}{J}\right)^3$ cos.	$\mu a^2\left(\frac{a}{J}\right)^3$ sin.
0 — 0	+ ½199″,8314	— —	+ ½342″,415	— —
1 — 0	— 2 ,3229	+ 1,3186	— 36 ,106	+ 20,282
2 — 0	+ 0 ,086	+ 0,014	+ 2 ,730	— 2,167
3 — 0	— 0 ,007	— 0,007	— 0 ,226	+ 0,161
— 2 — 1	0 ,000	0,000	+ 0 ,49	— 0,23
— 1 — 1	— 0 ,169	+ 0,296	— 5 ,76	+ 2,93
0 — 1	+ 7 ,948	— 6,611	+ 50 ,25	— 42,29
1 — 1	— 17 ,019	+ 45,887	— 78 ,58	+ 211,77
2 — 1	— 0 ,144	— 0,955	— 3 ,52	— 23,22
3 — 1	— 0 ,030	+ 0,004	+ 0 ,43	+ 1,73
4 — 1	0 ,000	0,000	— 0 ,01	— 0,14
— 1 — 2	0 ,000	0,000	— 0 ,07	+ 1,02
0 — 2	— 0 ,085	— 0,827	— 0 ,01	— 10,47
1 — 2	+ 2 ,366	+ 6,719	+ 20 ,61	+ 57,91
2 — 2	— 13 ,353	— 11,481	— 99 ,44	— 85,60
3 — 2	+ 0 ,375	+ 0,079	+ 12 ,39	+ 2,68
4 — 2	0 ,000	0,000	— 0 ,87	— 0,16
— 1 — 3	— 0 ,0068	— 0,0002	+ 0 ,156	+ 0,083
0 — 3	— 0 ,07672	+ 0,06473	— 1 ,3588	— 0,8935
1 — 3	+ 0 ,81033	+ 0,32011	+ 10 ,9454	+ 4,6852
2 — 3	— 4 ,16236	— 0,0707	— 46 ,7274	— 0,5936
3 — 3	— 6 ,1277	— 3,3887	+ 63 ,3140	— 34,9182
4 — 3	— 0 ,086	+ 0,130	— 3 ,70	+ 5,56
5 — 3	— —	— —	+ 0 ,31	— 0,32
0 — 4	— —	—	— 0 ,23	+ 0,13
1 — 4	+ 0 ,081	— 0,048	+ 1 ,79	— 0,95
2 — 4	— 0 ,490	+ 0,494	— 7 ,75	+ 7,60
3 — 4	+ 0 ,838	— 2,121	+ 11 ,44	— 29,57
4 — 4	+ 0 ,434	+ 2,886	+ 5 ,71	+ 38,13
5 — 4	— 0 ,033	— 0,059	— 2 ,01	— 2,77
6 — 4	— —	— —	+ 0 ,08	+ 0,19

$\varepsilon, \varepsilon'$	$u\left(\frac{a}{J}\right)$ cos.	$u\left(\frac{a}{J}\right)$ sin.	$\mu a^2\left(\frac{a}{J}\right)^3$ cos.	$\mu a^2\left(\frac{a}{J}\right)^3$ sin.
2 — 5	— 0,001	+ 0,100	+ 0,13	+ 1,96
3 — 5	— 0,191	— 0,444	— 3,40	— 8,17
4 — 5	+ 0,911	+ 0,808	+ 15,07	+ 13,19
5 — 5	— 1,220	— 0,252	— 19,77	— 4,30
6 — 5	+ 0,015	— 0,008	+ 1,67	— 0,60
7 — 5	0,000	0,000	— 0,11	— 0,16
1 — 6	0,000	0,000	— 0,05	— 0,03
2 — 6	+ 0,013	+ 0,007	+ 0,33	+ 0,20
3 — 6	— 0,081	— 0,015	— 1,84	— 0,67
4 — 6	+ 0,315	— 0,011	+ 6,38	— 0,28
5 — 6	— 0,557	+ 0,284	— 10,73	+ 5,72
6 — 6	+ 0,284	— 0,461	+ 5,53	— 8,81
7 — 6	0,000	+ 0,022	— 0,06	+ 0,90
4 — 7	0,000	0,000	+ 1,05	— 1,17
5 — 7	— 0,061	+ 0,178	— 1,42	+ 4,15
6 — 7	— 0,041	— 0,318	— 0,97	— 7,08
7 — 7	+ 0,145	+ 0,190	+ 3,23	+ 4,23
8 — 7	— 0,041	— 0,004	— 0,40	— 0,16
5 — 8	0,000	0,000	+ 0,54	+ 1,09
6 — 8	0,000	0,000	— 2,20	— 1,83
7 — 8	+ 0,156	+ 0,041	+ 3,97	+ 0,89
8 — 8	— 0,105	+ 0,031	— 2,58	+ 0,80
9 — 8	— 0,002	— 0,003	+ 0,16	— 0,16
6 — 9	0,000	0,000	— 0,97	— 0,02
7 — 9	0,000	0,000	+ 1,61	— 0,86
8 — 9	— 0,045	+ 0,068	— 1,26	+ 1,91
9 — 9	+ 0,004	— 0,049	+ 0,08	— 1,36

In dieser Tafel sind alle Glieder mit aufgenommen, die grösser als eine halbe Bogensekunde sind, oder die nach der Integration diesen Werth erreichen können. Um diese letztere Bedingung erfüllen zu können, bin ich genöthigt gewesen einige Glieder, die man durch die vorige Rechnung nicht bekommt, besonders zu berechnen. Diese Glieder sind diejenigen, die den Argumenten $-\varepsilon - 3\varepsilon'$, $\varepsilon - 6\varepsilon'$, $2\varepsilon - 6\varepsilon'$ entsprechen.

11.

Um die partiellen Ableitungen der Störungsfunktion zu erhalten, muss jetzt $\mu a'^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ mit den folgenden Faktoren multiplicirt werden

$$F_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

$$F_2 = \frac{\sin I}{a}\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'' + \Pi'),$$

deren Entwickelungen nach den Vielfachen von ε und ε' die folgende Form haben

$$\begin{aligned} F_1 = {} & [9{,}587433] + [8{,}16740]\ 2\cos\varepsilon + [6{,}680]_n\ 2\cos 2\varepsilon + \\ & + [8{,}38493]\ 2\cos(-\varepsilon') + [6{,}469]\ 2\cos(-2\varepsilon') \\ F_2 = {} & [7{,}1932]\ + [8{,}20617]_n\ 2\cos(-\varepsilon') + [7{,}9628]\ 2\sin(-\varepsilon'), \end{aligned}$$

wo die eingeklammerten Zahlen Logaritmen sind.

Die Resultate dieser »mechanischen» Multiplikationen theile ich hier nicht mit; dagegen werde ich die Kontrolle für die Rechnung niederschreiben. Diese wurde der Art angestellt, dass dieselbe Multiplikation mit denjenigen Reihen ausgeführt wurde, die man für $\varepsilon = 0$ erhält, und die man aus Tafel XVI durch Addition der Zahlen in den verschiedenen Abtheilungen bekommt.

Taf. XVII. $\varepsilon = 0$

	$F_1 \cdot \mu a'^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$		Kontrolle.		$F_2 \cdot \mu a'^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$		Kontrolle.	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0	+ 116″,06	——	+ 116″,00	——	+ 14″,40	—	+ 14″,41	—
1	— 20 ,32	+ 63,30	— 20 ,29	+ 63,27	— 3 ,75	+ 3,93	— 3 ,73	+ 3,93
2	— 27 ,44	— 17,49	— 27 ,50	— 17,41	— 1 ,49	— 2,61	— 1 ,48	— 2,61
3	+ 10 ,82	— 10,20	+ 10 ,72	— 10,26	+ 1 ,41	— 0,34	+ 1 ,38	— 0,36
4	+ 5 ,41	+ 5,80	+ 5 ,41	+ 5,71	+ 0 ,03	+ 0,68	+ 0 ,02	+ 0,66
5	— 2 ,76	+ 0,61	— 2 ,80	+ 0,66	— 0 ,26	— 0,08	— 0 ,32	— 0,04
6	— 0 ,04	— 1,74	— 0 ,20	— 1,73	+ 0 ,09	0,09	+ 0 ,05	— 0,11
7	+ 0 ,83	+ 0,16	+ 0 ,82	+ 0,15	— 0 ,02	+ 0,07	+ 0 ,04	+ 0,06
8	— 0 ,13	+ 0,32	— 0 ,38	0,05	— 0 ,07	+ 0,06	— 0 ,02	+ 0,03
9	0 ,21	— 0,09	— 0 ,20	— 0,14	+ 0 ,02	+ 0,01	+ 0 ,01	— 0,01

Weiter ist

$$a\Omega = \mu_1\left(\frac{a}{\Delta}\right) - (H)$$

$$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r} = F_1\mu a^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 - \tfrac{1}{2}\mu_1\left(\frac{a}{\Delta}\right) - (H)$$

$$a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z} = -F_2\mu a^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 + (I),$$

wo

$$(H) = \frac{\mu}{a^2}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \cdot \frac{r}{a}\cdot\frac{r'}{a'}\cdot\cos H$$

$$(I) = \frac{\mu}{a^2}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \cdot \frac{r'}{a'}\cdot\sin(f'' + H').$$

Die Entwickelung von (H) und (I) erfordert zuerst die Ausdrücke für $\mu a^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$ und $\frac{r}{a}\cdot\frac{r'}{a'}\cdot\cos H$ in ε und ε'. Der letztere Ausdruck ist uns von p. 6 bekannt

$$\frac{r}{a}\cdot\frac{r'}{a'}\cdot\cos H = Aee' - Ae'\cos\varepsilon - Ae\cos\varepsilon' - Be\sin\varepsilon' - Ce'\sin\varepsilon + \\ + A\cos\varepsilon\cos\varepsilon' + B\cos\varepsilon\sin\varepsilon' - C\sin\varepsilon\cos\varepsilon' + D\sin\varepsilon\sin\varepsilon'$$

oder bequemer dargestellt

$\varepsilon,\ \varepsilon'$	$\frac{r}{a}\cdot\frac{r'}{a'}\cdot\cos H$	
	cos.	sin.
0 — 0	Aee'	—
1 — 0	Ae'	$+ Ce'$
— 1 — 1	$\frac{1}{2}(A - D)$	$-\frac{1}{2}(B - C)$
0 — 1	$- Ae$	$+ Be$
1 — 1	$+\frac{1}{2}(A + D)$	$-\frac{1}{2}(B + C)$

Schreiben wir weiter die Entwickelung von $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$ unter der Form

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 = (1 + e'\cos\varepsilon')^{-3} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{1}{2}A_n\cos n\varepsilon',$$

so kann man leicht finden, dass die Koefficienten A_0, A_1, A_2 folgende Ausdrücke haben

$$A_0 = \frac{2 + e'^2}{(1 - e'^2)^{5/2}}; \quad A_1 = \frac{-3e'}{(1 - e'^2)^{5/2}}; \quad A_2 = \frac{3e'^2}{(1 - e'^2)^{5/2}}.$$

A_3, A_5 etc. sind aber nicht so einfach, und ich habe deswegen diese Koefficienten nach einer anderen Methode berechnet; gesetzt

$$q_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

so ist

$$q_n = \frac{-\frac{(n+2)}{2n} e'}{1 + \frac{n-2}{2n} e' q_{n+1}}$$

$$A_n = A_0 q_1 q_2 \ldots q_n.$$

In unserem Falle wird

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = [0{,}31411] + [9{,}1657]_n \cos \varepsilon' + [7{,}852] \cos 2\varepsilon' + [6{,}458]_n \cos 3\varepsilon' + [5{,}02] \cos 4\varepsilon$$

und

Tab. XVIII.

ε, ε'	$\frac{\mu}{a^2} \cdot \frac{r}{a} \cdot \frac{r'}{a'} \cdot \cos H$	
	cos.	sin.
0 0	$-\frac{1}{2}$ 0″.194	—
1 0	+ 0 .746	+ 2.001
−1 1	— 0 .009	+ 0.165
0 −1	+ 2 .001	— 5.416
1 −1	— 15 .360	+ 41.418

und hiernach bekommt man folgende Entwickelung von (H) und (I)

Tab. XIX.

i, i'	(H)		(I)	
	cos.	sin.	cos.	sin.
0 0	$-\frac{1}{2}$ 0″,488	——	$+\frac{1}{2}$ 0″,732	——
1 0	+ 1 ,876	— 2,001	——	——
— 1 — 1	0 ,12	+ 0,17	——	——
0 — 1	+ 2 ,05	— 5,45	— 3 ,04	+ 3,45
1 — 1	— 15 ,52	+ 41,57	——	——
— 1 — 2	0 ,00	— 0,01	——	——
0 — 2	— 0 ,14	+ 0,39	+ 0 ,22	— 0,25
1 — 2	+ 1 ,13	— 3,03	——	——
— 1 — 3	- 0 ,0001	+ 0,0008	——	——
0 — 3	+ 0 ,0071	— 0,0192	— 0 ,0106	+ 0,0122
1 — 3	— 0 ,0546	+ 0,1468	——	——

welche Entwickelungen in gehöriger Ordnung kontrollirt worden sind.

12.

Die Werthe, die ich mit Anwendung dieser Tafeln für die Koefficienten der Entwickelung der Störungsfunktion und ihrer partiellen Ableitungen gefunden habe, sind in der folgenden Tafel zusammengestellt.

Tab. XX.

i, i'	$a\,\Omega$		$ar\,\frac{\partial\Omega}{\partial r}$		$a^2\,\frac{\partial\Omega}{\partial z}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 0	$+\frac{1}{2}$ 200″,319	——	$+\frac{1}{2}$ 29″,508	——	$+\frac{1}{2}$ 2″,591	——
1 — 0	— 4 ,199	+ 3,330	— 7 ,536	+ 4,123	— 3 ,271	+ 2,658
2 — 0	+ 0 ,086	+ 0,014	+ 0 ,363	— 0,013	+ 0 ,162	— 0,493
3 — 0	— 0 ,007	— 0,007	0 ,033	— 0,017	— 0 ,009	+ 0,028
— 1 — 1	— 0 ,05	+ 0,13	— 0 ,38	+ 0,53	— 0 ,75	0,00
0 — 1	+ 5 ,90	— 1,16	+ 3 ,88	— 4,20	+ 2 ,49	+ 0,21
1 — 1	— 1 ,50	+ 4,32	— 5 ,30	+ 14,57	— 0 ,48	+ 1,45
2 — 1	— 0 ,14	— 0,95	0 ,12	— 3,21	0 ,78	— 2,31
3 — 1	— 0 ,03	0,00	— 0 ,14	+ 0,15	+ 0 ,17	+ 0,15
— 1 — 2	0 ,00	— 0,01	+ 0 ,11	+ 0,16	— 0 ,06	+ 0,10
0 — 2	+ 0 ,06	1,22	— 0 ,56	2,11	+ 0 ,63	— 1,39
1 — 2	+ 1 ,24	+ 9,75	+ 5 ,83	+ 15,41	+ 0 ,79	+ 4,22
2 — 2	— 13 ,35	— 11,48	30 ,09	25,90	0 ,86	— 0,65
3 — 2	+ 0 ,37	+ 0,08	+ 1 ,63	+ 0,49	+ 1 ,34	+ 0,02
4 — 2	0 ,00	0,00	— 0 ,07	— 0,16	— 0 ,11	+ 0,06

$\varepsilon\ \varepsilon'$	$a\,\Omega$		$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$		$a^2\frac{\partial\Omega}{\partial z}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
−1 −3	+ 0″,0069	− 0.0010	+ 0″,0279	+ 0,0420	+ 0″,0083	+ 0,0169
0 − 3	− 0 ,0838	+ 0.0839	− 0 .2936	− 0,0468	− 0 .1059	− 0,1567
1 − 3	+ 0 ,8649	+ 0,1733	+ 2 ,5786	+ 0.1802	+ 0 .8833	− 0,6698
2 3	− 4 ,1624	− 0,0707	− 12 ,2967	+ 1,2509	− 2 .5063	− 0,4111
3 − 3	+ 6 ,1277	− 3.3887	+ 20 .0974	− 11,0892	+ 0 ,5830	− 0,3883
4 − 3	− 0 ,09	+ 0.13	− 0 .56	+ 0,06	− 0 .26	+ 0.65
5 − 3	0 ,00	0,00	0 .00	+ 0,15	0 .00	0.00
1 − 4	+ 0 ,08	− 0,05	+ 0 .28	− 0,32	+ 0 .22	− 0,02
2 − 4	− 0 ,49	+ 0,49	− 1 .45	+ 2,18	− 0 ,78	+ 0.44
3 − 4	+ 0 ,84	− 2.12	+ 2 .53	− 8.66	+ 0 ,71	− 1.25
4 − 4	+ 0 ,43	+ 2.89	+ 1 .84	+ 12.38	+ 0 .10	+ 0,41
5 − 4	− 0 ,03	− 0,06	− 0 .23	− 0,37	− 0 .28	− 0.26
2 − 5	0 ,00	+ 0.10	+ 0 .22	+ 0 40	− 0 ,05	+ 0.19
3 − 5	− 0 ,19	− 0.44	− 1 .19	− 1.99	− 0 .12	− 0.61
4 − 5	+ 0 ,91	+ 0.81	+ 4 .73	+ 3.59	+ 0 .54	+ 0.60
5 − 5	− 1 ,22	− 0.25	− 6 .48	− 1.40	− 0 .28	− 0.01
6 − 5	0 ,00	0.00	+ 0 .21	− 0,09	+ 0 .17	− 0,09
1 − 6	0 ,000	0.000	− 0 ,012	− 0.009	0 ,000	0,000
2 − 6	+ 0 .013	+ 0,007	+ 0 .091	+ 0,019	+ 0 .020	+ 0,031
3 − 6	− 0 ,081	− 0,015	− 0 .475	− 0.107	− 0 .133	− 0.100
4 − 6	+ 0 ,315	− 0.011	+ 1 .737	− 0,307	+ 0 ,382	+ 0.065
5 − 6	− 0 ,56	+ 0.28	− 3 .16	+ 1,92	− 0 .40	+ 0,158
6 − 6	+ 0 ,28	− 0.46	+ 1 .84	− 2,91	+ 0 .05	− 0,14
7 − 6	0 ,00	0,00	− 0 ,02	− 0,23	+ 0 .01	+ 0.10
4 − 7	0 ,00	0,00	+ 0 ,23	− 0.38	+ 0 ,10	− 0.06
5 − 7	− 0 ,06	+ 0,18	− 0 .26	+ 1,25	− 0 .12	+ 0,18
6 − 7	− 0 ,04	− 0,32	− 0 .40	− 2,20	− 0 .01	− 0,23
7 − 7	+ 0 ,14	+ 0,19	+ 1 ,07	+ 1,42	+ 0 .05	+ 0,04
8 − 7	− 0 ,04	0,00	+ 0 ,11	+ 0 05	0 .00	0,00
5 − 8	0 .00	0.00	+ 0 ,18	+ 0,39	0 .00	0.00
6 − 8	0 ,00	0,00	− 0 .74	− 0,53	− 0 .06	− 0.11
7 − 8	+ 0 ,16	+ 0.04	+ 1 .26	+ 0,18	+ 0 .13	+ 0.04
8 − 8	− 0 ,10	+ 0.03	− 0 .86	+ 0.25	0 ,00	0.00
6 − 9	0 ,00	0,00	− 0 .30	+ 0,02		
7 9	0 ,00	0.00	+ 0 .49	− 0,32		
8 9	− 0 .04	+ 0.07	− 0 .39	+ 0,67		
9 − 9	0 ,00	− 0,05	+ 0 .01	− 0,47		

Nach der schon mehrmals angewandten Methode wurden diese Rechnungen kontrollirt und richtig befunden.

13.

Da bei den Integrationen ε die unabhängige Veränderliche ist, so müssen wir in den obigen Reihen für Ω etc., ε gegen ε vertauschen. Dieser Übergang wird in zwei Abtheilungen ausgeführt werden. In der ersteren werden wir g' statt ε' einführen. Bezeichnen wir eine beliebige der obigen Reihen mit F, so setzen wir also

$$F = \sum\sum (i, i', c) \cos (i\varepsilon - i'\varepsilon') + \sum\sum (i, i', s) \sin (i\varepsilon - i'\varepsilon')$$

unter der Form

$$F = \sum\sum ((i, i', c)) \cos (i\varepsilon - i'g') + \sum\sum ((i, i', s)) \sin (i\varepsilon - i'g').$$

Wenn wir mit $I_i^{(k)}$ die gewöhnliche *Besselsche* Transcendente[1]) erster Art bezeichnen, so werden die neuen Koefficienten durch die folgende Gleichung gefunden

$$\left((i, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix})\right) = \left(i, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right) I_{i'\lambda}^{(0)} - \left(i, i'+1, \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right) \frac{i'+1}{i} I_{i'\lambda}^{(1)} + \left(i, i'+2, \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right) \frac{i'+2}{i} I_{i'\lambda}^{(2)} \pm \ldots$$

$$+ \left(i, i'-1, \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right) \frac{i-1}{i} I_{i'\lambda}^{(1)} + \left(i, i'-2, \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right) \frac{i-2}{i} I_{i'\lambda}^{(2)} + \text{etc.}$$

wo $\lambda = -\frac{1}{2}e.$

Die Koefficienten $I_i^{(k)}$ werden sehr bequem nach der folgenden von Hansen gegebenen Methode berechnet[2]). Man setzt

$$l = i'\lambda \qquad (i' = 1, 2, 3 \ldots)$$

$$I_l^{(0)}[3]) = 1 - \frac{l^2}{1^2} + \frac{l^4}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{l^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} \pm \text{etc.}$$

$$r_k = \frac{k}{l} \qquad (k = 5, 4, \ldots 1)$$

$$\frac{1}{p_k} = r_k - p_{k+1}$$

so wird

$$I_l^{(k)} = I_l^{(0)} p_1 p_2 p_3 \cdots p_k.$$

[1]) Man muss bemerken, dass diese Transcendente unter den Analysten in zwei verschiedenen Bedeutungen genommen wird; bezeichnen wir nämlich mit $I_i^{(k)}$ die selbe Funktion nach *Bessels* eigener Bezeichnungsart, so ist $I_i^{(k)} = I_{\frac{1}{2}i}^{(k)}$.

[2]) Bessel (Werke I. p. 103) und Lommel (*Theorie der Besselschen Funktionen*) haben Tafeln für diese Funktionen gegeben. Da dieselben aber nicht sehr ausgedehnt sind, so ist die *Hansensche* Methode viel bequemer.

[3]) Zur Kontrolle habe ich $I_i^{(0)}$ wie $I_i^{(1)}$ aus *Fyrstalliga Handtabeller utgifna af* N. Ekholm, C. V. L. Charlier *och* K. L. Hagstrom berechnet.

Die so erhaltenen Werthe sind in der folgenden Tafel enthalten

Tab. XXI. $\log I_{i'\lambda'}^{(k)}$ $\log \lambda'$ 8,384933

k.	$i'=1$.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0	9.99974	9.6979	9.52058	9.3938	9.2946	9.2125	9.1423	9.0804	9.0248
1	8.38480	8,3844	8.38179	8,3819	8.3818	8,3803	8,3786	8.3768	8.3745
2	6,4687	6,770	6,9432	7,070	7,166	7.244	7,310	7,366	7,416
3	4.27	4,98	5.328	5.58	5.87	5.93	6,064	6,178	6,280
4		—	—	—		4.49	4.69	4.86	5,02

Diese Berechnung wurde in der Weise kontrollirt, dass $I_l^{(4)}$ besonders gerechnet wurde. Da die Koefficienten $I_l^{(k)}$ nur von der Excentricität der Jupitersbahn abhängen, so hat man auch darin eine Kontrolle, dass die Werthe derselben bei verschiedenen Rechnern nicht sehr verschieden sein können.

Mit Hülfe der Tafel XXI wurden nun folgende Werthe für die $\left((i,\ i',\ {}^{c}_{s})\right)$ erhalten.

Tab. XXII.

$\varepsilon,\ g'$	$a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$		$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$		$a^2\frac{\partial\Omega}{\partial z}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 0	0″,000	——	+ ½ 29″,320	——	+ ½ 2″.470	——
1 — 0	+ 3 ,228	+ 4,161	— 7 ,399	+ 3,783	3 ,241	+ 2,623
2 0	— 0 ,074	— 0,179	+ 0 ,366	+ 0,065	+ 0 ,181	— 0,437
3 — 0	— 0 ,014	+ 0,014	— 0 ,030	0,021	— 0 ,013	+ 0,024
— 1 — 1	— 0 ,13	— 0,05	0 ,38	+ 0,52	— 0 ,75	0,00
0 — 1	0 ,00	0,00	+ 3 ,91	— 4.10	+ 2 ,46	+ 0,28
1 — 1	+ 3 ,85	+ 1,56	— 5 ,58	+ 13,86	— 0 ,52	+ 1,25
2 — 1	— 0 ,79	— 1,00	+ 1 ,33	— 1,95	— 0 ,74	— 2,28
3 — 1	— 0 ,02	+ 0,09	— 0 ,20	+ 0.12	+ 0 11	+ 0.15
— 1 — 2	+ 0 ,01	0,00	+ 0 ,10	+ 0,17	— 0 ,08	+ 0.10
0 — 2	0 ,00	0,00	— 0 ,45	— 2,21	+ 0 ,70	— 1,38
1 — 2	+ 9 ,81	1,20	+ 5, 50	+ 15,09	+ 0 ,72	+ 4,20
2 — 2	— 22 ,95	+ 26,10	— 29 ,14	— 26,02	— 0 ,70	— 0.68
3 — 2	+ 0 ,98	+ 0,22	+ 0 ,17	+ 1,28	+ 1 ,30	+ 0,05
4 — 2	— 0 ,04	— 0,03	— 0 ,03	— 0,19	— 0 ,09	+ 0,01

s, g'	$a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$		$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$		$a^2\frac{\partial\Omega}{\partial z}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
— 1 — 3	+ 0″,0011	+ 0,0069	+ 0″,0328	— 0,0333	+ 0″,0048	+ 0,0216
0 — 3	0 ,0000	0,0000	— 0 ,3156	— 0,1520	— 0 ,0728	— 0,2216
1 — 3	+ 0 ,9784	— 0,9111	+ 2 ,8134	+ 0,9652	+ 0 ,8951	+ 0,8728
2 — 3	— 1 ,3442	+ 9,4736	— 13 ,5407	— 0,2146	— 2 ,4603	— 0,4838
3 — 3	— 9 ,4934	— 18,0964	+ 19 ,8207	— 10,1808	+ 0 ,5733	— 0,2673
4 — 3	— 0 ,59	+ 0,50	— 0 ,72	— 0,53	— 0 ,27	+ 0.61
1 — 4	— 0 ,01	— 0,14	+ 0 ,48	— 0,28	+ 0 ,28	+ 0,03
2 — 4	+ 0 ,89	+ 1,52	— 2 ,43	+ 2,20	- 0 ,94	+ 0,39
3 — 4	— 6 ,88	— 3,89	+ 4 ,12	— 9,13	+ 0 ,75	— 1,19
4 — 4	+ 11 ,01	— 1.25	+ 1 ,24	+ 11,87	+ 0 ,01	+ 0.39
5 — 4	— 0 ,15	— 0,56	+ 0 ,56	— 0,18	— 0 ,25	— 0,26
2 5	+ 0 ,28	+ 0,13	+ 0 ,02	+ 0,61	— 0 ,13	+ 0,23
3 — 5	— 1 ,95	+ 0,21	— 0 ,77	— 2,84	— 0 ,03	— 0,72
4 — 5	+ 4 ,31	— 3,57	+ 4 ,59	+ 4,78	+ 0 ,49	+ 0,64
5 — 5	— 1 ,45	+ 5,62	— 5 ,94	— 1,68	— 0 ,25	— 0,06
6 — 5	+ 0 ,40	+ 0,24	— 0 ,04	+ 0,32	+ 0 ,17	— 0,07
1 — 6	0 ,000	0,000	— 0 ,009	— 0,011	0 ,000	0,000
2 — 6	+ 0 ,045	— 0,019	+ 0 ,103	+ 0,082	+ 0 ,009	+ 0,054
3 — 6	— 0 ,247	+ 0,289	— 0 ,585	— 0,408	— 0 ,140	— 0,182
4 — 6	+ 0 ,425	— 1,683	+ 2 ,243	+ 0,280	+ 0 ,425	+ 0,149
5 — 6	+ 1 ,09	+ 3,52	— 3 ,84	+ 1.47	— 0 ,41	+ 0,12
6 — 6	— 0 ,40	— 1,69	+ 1 ,89	— 2,49	+ 0 ,07	— 0,11
7 — 6	0 ,00	0,00	— 0 ,20	— 0,46	0 ,00	+ 0,09
4 — 7	0 ,00	0.00	+ 0 ,51	— 0,37	+ 0 ,15	— 0,06
5 — 7	+ 1 ,05	+ 0,75	— 0 ,79	+ 1,40	— 0 ,18	+ 0,20
6 — 7	— 2 ,24	— 0,01	+ 0 ,01	— 2,45	0 ,00	— 0,23
7 — 7	+ 1 .23	— 0,77	+ 0 ,80	+ 1,32	+ 0 ,02	+ 0,04
8 — 7	— 0 ,08	+ 0,15	+ 0 ,27	0,00	0 ,00	0,00
9 — 7	0 ,00	— 0,16	——	——	——	——
5 — 8	0 ,00	0,00	+ 0 ,09	+ 0,62	0 ,00	0,00
6 — 8	— 0 ,17	0,00	— 0 ,70	— 0,91	— 0 ,06	— 0,11
7 — 8	+ 0 ,50	— 1,22	+ 1 ,29	+ 0,48	+ 0 ,13	+ 0.04
8 — 8	+ 0 ,14	+ 0,79	— 0 ,73	+ 0,10	0 ,00	0,00
6 — 9	0 .00	0,00	— 0 ,43	— 0,13	——	——
7 — 9	0 ,00	0,00	+ 0 ,73	— 0,25	——	— —
8 — 9	+ 0 ,55	+ 0,49	— 0 ,53	+ 0,69	——	——
9 — 9	— 0 ,44	— 0,04	+ 0 ,01	— 0,45	——	——

Diese Transformation wurde kontrollirt, indem ich in XX $s = 0$ setzte, und dann mit der so erhaltenen Reihe dieselbe Rechnung ausführte. Das Resultat muss dann mit der aus XXII für $s = 0$ erhaltenen Reihe identisch sein. Diese letztere ist

Tab. XXIII.

g'	$a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$		$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$		$a^2\frac{\partial\Omega}{\partial z}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0	+ ½ 6″.576	—	+ ½ 15″.194	—	− ½ 3″.676	—
1	+ 86 .55	+ 0,60	— 0 .92	− 8.42	− 0 .56	− 0.60
2	— 16 .25	+ 25.09	— 23 .85	− 11.23	− 1 .85	+ 2.30
3	— 10 .71	— 9.03	+ 8 ,09	− 10,03	− 1 .33	+ 0,53
4	+ 4 .86	— 4.32	+ 3 .97	− 4.40	− 0 .15	0,64
5	+ 1 ,59	+ 2.63	− 2 .06	+ 1.19	+ 0 .25	+ 0,02
6	+ 0 .91	+ 0,42	− 0 .39	— 1.54	− 0 .04	+ 0,13
7	— 0 ,04	— 0.04	+ 0 .80	— 0,10	− 0 .01	− 0,03
8	+ 0 .47	+ 0.43	— 0 ,05	+ 0.29	+ 0 .07	− .06
9	+ 0 .11	+ 0,26	− 0 .22	0,14		

Die Kontrolle gab

Tab. XXIV.

g'	$a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$		$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$		$a^2\frac{\partial\Omega}{\partial z}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0	+ ½ 6″.576	—	+ ½ 15″.202	—	− ½ 3″.678	—
1	+ 86 .60	+ 0.61	— 0 ,93	+ 8.44	+ 0 .57	— 0,61
2	— 16 .23	+ 25.11	— 23 .85	— 11.23	+ 1 .85	+ 2,32
3	— 10 .79	— 9.03	+ 8 ,09	— 10.03	1 .30	+ 0,56
4	+ 4 .94	— 4.36	+ 3 .89	— 4.48	— 0 ,16	— 0,65
5	+ 1 .59	+ 2.63	— 2 .13	+ 1,22	+ 0 ,26	0,00
6	+ 0 ,95	+ 0,46	— 0 ,40	— 1,53	— 0 .04	+ 0.13
7	— 0 .04	— 0.06	+ 0 ,74	— 0,12	+ 0 .01	— 0,04
8	+ 0 .51	— 0,32	+ 0 .01	+ 0,30	+ 0 .07	− 0,07
9	+ 0 .20	+ 0,26	— 0. 20	0,05		

14.

Nachdem wir die obige Form für die partiellen Ableitungen der Störungsfunktion erhalten haben, werden wir nun in denselben g' gegen ε vertauschen. Schreiben wir daher F in der folgenden Weise

$$F = \sum\sum[i,\ i',\ c]\cos(i\varepsilon - i'V)$$
$$+ \sum\sum[i,\ i',\ s]\sin(i\varepsilon - i'V)$$
$$V = \mu(\varepsilon - c) + c',$$

so müssen wir diese neuen Koefficienten $[i, i', c]$ und $[i, i, s]$ durch die früheren $((i, i', c))$ und $((i, i', s))$ ausdrücken. Man findet leicht, dass dieselben durch die folgende Formel bestimmt sind

$$\begin{aligned}\left[i, i, \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right] = I^{(0)}_{i'\lambda}\left(\left(i, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right)\right) &+ I^{(1)}_{i'\lambda}\left[\left(\left(i-1, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right)\right) - \left(\left(i+1, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right)\right)\right] \\ &+ I^{(2)}_{i'\lambda}\left[\left(\left(i-2, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right)\right) + \left(\left(i+2, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right)\right)\right] \\ &+ I^{(3)}_{i'\lambda}\left[\left(\left(i-3, i, \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right)\right) - \left(\left(i+3, i', \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right)\right)\right] \\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

wo $I^{(0)}$, $I^{(1)}$ etc. wie vorher die BESSELSCHEN Transcendenten bezeichnen und

$$\lambda = \tfrac{1}{2} i u e .$$

Mit diesem Werth von λ

$$\log \lambda = 8{,}329195$$

berechnete ich zuerst das folgende System von Werthen der I-Funktionen.

Tab. XXV. $\log I^{(k)}_{i'\lambda}$ $\log \lambda = 8{,}329195$

k	$i'=1$	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0	9.99880	9.99921	9.99822	9.99683	9.99503	9.99283	9.99025	9.98725	9.98384
1	8.3291	8.6297	8.80542	8.7297	9.0257	9.1038	9.1694	9.2259	9.2754
2	6.357	6.959	7.3110	7.560	7.754	7.911	8.044	8.159	8.260
3	4.209	5.112	5.640	6.015	6.305	6.542	6.742	6.916	7.068
4	—		3.34	4.34	4.73	5.05	5.31	5.55	5.75
5	—	—	—	—	—	—	—	4.08	4.33

Da $I^{(0)}_{i'\lambda}$ sehr nahe eins ist, so ist es bei der Rechnung bequem die Multiplikation mit diesem Faktor nach dem folgenden Schema auszuführen

$$I^{(0)}_{i'\lambda}\left(\left(i, i, \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right)\right) = \left(\left(i, i, \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right)\right) + \left[I^{(0)}_{i'\lambda} - 1\right]\left(\left(i, i, \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right)\right).$$

Die transformirten Reihen für $\dfrac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}$ etc. sind:

Tab. XXVI.

ε, V	$a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$		$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$		$a^2\frac{\partial\Omega}{\partial z}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 0	——	——	+ ½ 29″,320	——	+ ½ 2″,470	——
1 — 0	+ 3′.228	+ 4,161	— 7 ,399	+ 3,783	— 3 ,241	+ 2,623
2 — 0	+ 0 ,074	— 0,179	+ 0 ,366	+ 0,065	+ 0 ,181	— 0,437
3 — 0	— 0 .014	+ 0.014	+ 0 ,030	— 0,021	— 0 ,015	+ 0.024
— 1 — 1	— 0 ,13	— 0,05	— 0 ,46	+ 0,61	— 0 .80	0,00
0 — 1	— 0 ,08	— 0,03	+ 4 ,02	— 4,38	+ 2 .46	— 0.26
1 — 1	+ 3 .87	+ 1,58	— 5 .52	+ 13,82	— 0 ,46	+ 1,30
2 — 1	— 0 ,71	— 0,97	+ 1 ,21	— 1,66	— 0 ,75	— 2,26
3 — 1	— 0 ,04	+ 0.07	— 0 ,17	+ 0,08	+ 0 .10	+ 0,10
— 1 — 2	+ 0 ,02	0,00	+ 0, 12	+ 0,27	— 0 .11	+ 0.16
0 — 2	— 0 ,44	+ 0,28	— 0 ,71	— 2,87	+ 0 ,67	— 1,56
1 — 2	+ 10 ,77	— 2,31	+ 6 ,71	+ 16,07	+ 0 .78	+ 4.17
2 — 2	— 22 .53	+ 26,00	— 28 ,85	— 25,38	— 0 ,72	— 0,50
3 — 2	+ 0 ,02	+ 1,33	— 1 .41	+ 0,19	+ 1 ,28	+ 0,02
4 — 2	— 0 ,02	+ 0,01	— 0 .05	+ 0,33	— 0 ,09	+ 0,01
— 1 — 3	+ 0 .0031	+ 0,0046	+ 0 ,0591	— 0,0216	+ 0 ,0113	+ 0,0375
0 — 3	— 0 ,0647	+ 0,0788	— 0 .5204	— 0,2162	— 0 .1343	— 0,2761
1 — 3	+ 1 ,0403	— 1,5497	+ 3 ,6889	+ 0,9443	+ 1, 0452	+ 0.8854
2 — 3	— 0 ,6711	+ 10,5338	— 14 ,5739	+ 0,4972	+ 2 .4301	— 0,4080
3 — 3	— 9 ,5008	— 17,4510	+ 18 ,9264	— 10,1851	+ 0 ,4330	— 0,3347
4 — 3	— 1 ,20	— 0.64	— 0 ,52	— 1.18	— 0 ,24	+ 0,59
1 — 4	0 ,11	0,27	+ 0 ,66	0,49	+ 0 ,36	0,00
2 — 4	+ 1 ,51	+ 1,82	2 ,71	+ 2,97	— 0 ,98	+ 0,49
3 — 4	— 7 ,86	— 3,63	+ 3 ,78	— 9.88	+ 0 .67	— 1,19
4 — 4	+ 10 ,35	— 1,52	+ 1 ,52	+ 11,03	+ 0 ,09	+ 0,31
5 — 4	+ 0 ,76	— 0,67	+ 0 ,68	+ 0,88	— 0 .25	— 0,23
2 — 5	+ 0 .50	+ 0,09	+ 0 ,12	+ 0,92	— 0 ,13	+ 0.30
3 — 5	— 2 ,34	+ 0.61	— 0 ,28	— 3,26	— 0 ,09	— 0,76
4 — 5	+ 4 ,22	— 4,07	+ 5 ,09	+ 4,61	+ 0 ,52	+ 0,38
5 — 5	— 1 ,06	+ 5,18	— 5 .40	— 1,21	— 0 ,22	+ 0,01
6 — 5	+ 0 ,27	+ 0,78	— 0 ,64	+ 0.16	+ 0 ,15	— 0,07
1 — 6	— 0 ,007	+ 0,004	— 0 ,027	— 0,024	0 ,000	0.000
2 — 6	+ 0 ,079	— 0,069	+ 0 ,192	+ 0,134	+ 0 ,029	+ 0,077
3 — 6	— 0 ,282	+ 0,523	— 0 ,877	— 0,415	— 0 ,194	— 0.191
4 — 6	+ 0 ,245	— 2.079	+ 2 .654	+ 0,017	+ 0, 453	— 0,108
5 — 6	+ 1 ,175	+ 3,465	— 3 ,736	+ 1.789	— 0 .361	+ 0,155
6 — 6	— 0 ,253	— 1.221	+ 1 ,393	— 2.327	+ 0 ,023	— 0,104
7 — 6	— 0 ,042	— 0,185	+ 0 ,209	— 0,764	+ 0 ,008	+ 0,079

ε, V	$a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$		$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$		$a^2\frac{\partial\Omega}{\partial z}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
4 — 7	— 0″,17	— 0,11	+ 0″,62	— 0,58	+ 0″,18	— 0,09
5 — 7	+ 1 ,36	+ 0,73	— 0 ,68	+ 1,69	— 0 ,16	+ 0,22
6 — 7	— 2 ,22	+ 0,21	— 0 ,22	— 2,39	— 0 ,02	— 0,21
7 — 7	+ 0 ,90	— 0,75	+ 0 ,72	+ 0,95	+ 0 ,02	+ 0,02
8 — 7	+ 0 ,07	+ 0,04	+ 0 ,39	+ 0,17	0 ,00	0,00
5 — 8	0 ,00	0,00	+ 0 ,22	+ 0,75	0 ,00	0,00
6 — 8	— 0 ,25	+ 0,27	— 0 ,89	— 0,86	— 0 ,08	— 0,11
7 — 8	+ 0 ,47	— 1,32	+ 1 ,23	+ 0,31	+ 0 ,12	+ 0,02
8 — 8	+ 0 ,22	+ 0,57	— 0 ,51	+ 0,17	0 ,00	0,00
9 — 8	0 ,00	+ 0,13	— 0 ,10	0,00	0 ,00	0,00
6 — 9	0 ,00	0,00	— 0 ,57	— 0,06		
7 — 9	— 0 ,10	— 0,28	+ 0 ,72	— 0,44		
8 — 9	+ 0 ,62	+ 0,48	— 0 ,37	+ 0,70		
9 — 9	— 0 ,33	+ 0,05	— 0 ,08	— 0,30		

Um diese Transformation zu kontrolliren hat HANSEN so verfahren, dass er in XXII $\varepsilon = 90°$ setzt und dann dieselbe Transformation an diesen Reihen ausführt. Die so erhaltenen Reihen müssen dann mit dem aus XXVI für $\varepsilon = 90°$ erhaltenen Resultate übereinstimmen. Diese Methode habe ich auch an die Transformation von $ar\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}$ benutzt. Die Anwendung derselben ist aber sehr peinlich und unbequem; ich habe mich daher einer anderer Methode benutzt. Wenn wir nämlich in der Formel

$$\begin{aligned}\left[i,\ i',\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right] = I^{(0)}_{i'\lambda}\left(\left(i,\ i,\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right)\right) &+ I^{(1)}_{i'\lambda}\left[\left(\left(i-1,\ i',\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right)\right) - \left(\left(i+1,\ i',\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right)\right)\right]\\ &+ I^{(2)}_{i'\lambda}\left[\left(\left(i-2,\ i',\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right)\right) + \left(\left(i+2,\ i',\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right)\right)\right]\\ &+ I^{(3)}_{i'\lambda}\left[\left(\left(i-3,\ i',\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right)\right) - \left(\left(i+3,\ i',\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right)\right)\right]\\ &+ \ldots\end{aligned}$$

successive $i,\ i+1,\ i+2$, etc. und $i-1,\ i-2$, etc. statt i setzen, so wird

$$\begin{aligned}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[i,\ i',\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right] = I^{(0)}_{i'\lambda}\sum\left(\left(i,\ i,\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right)\right) &+ I^{(1)}_{i'\lambda}\sum\left[\left(\left(i-1,\ i',\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right)\right) - \left(\left(i+1,\ i',\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right)\right)\right]\\ &+ I^{(2)}_{i'\lambda}\sum\left[\left(\left(i-2,\ i',\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right)\right) + \left(\left(i+2,\ i',\ \begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\right)\right)\right]\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

oder

$$\sum \left[i,\ i',\ \begin{matrix} c \\ s \end{matrix} \right] = I^{(0)}_{i'i} \sum \left(\left(i,\ i',\ \begin{matrix} c \\ s \end{matrix} \right) \right) + 2 I^{(2)}_{i'i} \sum \left(\left(i,\ i',\ \begin{matrix} c \\ s \end{matrix} \right) \right) + \\ + 2 I^{(4)}_{i'i} \sum \left(\left(i,\ i',\ \begin{matrix} c \\ s \end{matrix} \right) \right) + \ldots \\ = \sum \left(\left(i,\ i,\ \begin{matrix} c \\ s \end{matrix} \right) \right) \quad \left[I^{(0)}_{i'i} + 2 I^{(2)}_{i'i} + 2 I^{(4)}_{i'i} + \ldots \right]$$

Wir können also dieselbe Rechnung, die an einem einzelnen Glied ausgeführt wird, auch auf die Summe einer jeden Abtheilung in XXII ausführen, und werden dann als Resultat die Summe der verschiedenen Abtheilungen in Tab. XXVI bekommen. Um aber die von HANSEN gemachte Bemerkung zu vermeiden, dass nämlich bei dieser Art zu kontrolliren alle Multiplikationen mit $I^{(1)}$, $I^{(3)}$ etc. nicht auf die Kontrolle einwirken können, so vergleiche ich nicht unmittelbar diese Endreihen mit einander, sondern führe gleichzeitig die Rechnung für die einzelnen Glieder und für die Summe derselben aus, ganz wie es bei einigen Rechnungen bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gebräuchlich ist. Dadurch wird jeder Schritt der Rechnung besonders kontrollirt, und die ganze Rechnung sehr angenehm. Folgendes ist ein Beispiel der Verfahrungsweise für $i = 3$.

−0−4.	0−3.	1−3.	2−3.	3−3.	4−3.	5−3.	6−3.	Σ.	Kontrolle.
+ 0,0011	0,0000	+ 0,9784	− 1,3442	−9,4934	− 0,5900	—	—	− 10,4481	− 10,4481
—	—	− 0,0040	+ 0,0055	+ 0,0388	+ 0,0024	—	—	+ 0,0427	+ 0,0425
—	− 0,0624	+ 0,0856	+ 0,6688	− 0,0482	− 0,6063	− 0,0377	—	− 0,0002	0,0000
− 0,0020	− 0,0027	− 0,0194	− 0,0012	+ 0,0020	− 0,0027	0,0194	− 0,0012	− 0,0426	− 0,0428
—	+ 0,0004	—	—	—	—	—	− 0,0004	0,0000	0,0000
+ 0,0031	− 0,0647	+ 1,0406	− 0,6711	−9,5008	− 1,1966	− 0,0571	− 0,0016	− 10,4482	− 10,4484

Die Zahlen in der ersten Reihe sind aus Tab. XXII genommen: die zweite ist die Multiplikation dieser Zahlen mit $I^{(0)}_{i'i} - 1$, die dritte mit $I^{(1)}_{i'i}$ u. s. f.; die letzte Zeile enthält dieselben Operationen an die Summe der ersten Reihe ausgeführt. Dieselbe Methode ist in vielen anderen Theilen der Störungsrechnung anwendbar, man kann dieselbe einfach so formuliren, dass man, bei Ausführung einer Operation an eine Gruppe von Gleidern, dieselbe Operation an die Summe derselben durchführt.

15.

Führen wir die Bezeichnungen

$$M_1 = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)[-3e + 4\cos\varepsilon - e\cos 2\varepsilon]$$
$$N_1 = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)[2\sin\varepsilon - e\sin 2\varepsilon]$$
$$M_2 = 2(2 + \operatorname{tg}^2 \varphi)\sin\varepsilon - \frac{e}{\cos^2 \varphi}\sin 2\varepsilon$$
$$N_2 = -\frac{e}{\cos^2 \varphi} - 2\cos\varepsilon + \frac{e}{\cos^2 \varphi}\cos 2\varepsilon$$

ein, so sind (vergleiche p. 40) die Störungen in a, π und e nach Einführung von Y und Γ durch die folgenden Gleichungen bestimmt

$$-d_2^3\frac{\delta a}{a} = 3a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$$

$$\frac{dY}{d\varepsilon} = M_1 a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + N_1 ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

$$\frac{d\Gamma}{d\varepsilon} = M_2 a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + N_2 ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

Die Multiplikation mit M_1, N_1 etc. brauche ich nicht hier mitzutheilen; die Ausdrücke für die Differentiale der Störungen sind:

Tab. XXVII.

s, s'	$-d_2^3\frac{\delta a}{a}$		$\frac{dY}{d\varepsilon}$		$\frac{d\Gamma}{d\varepsilon}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 0	—	—	+ ½20″.826	—	½27″,772	—
1 — 0	— 9″.684	— 12.483	— 0 ,738	+ 28,198	— 29 .835	— 1.178
2 — 0	— 0 ,222	+ 0,537	+ 2 .640	— 0,874	+ 0 .930	+ 2,727
3 0	+ 0 ,042	— 0,042	+ 0 .116	+ 0,217	— 0 ,217	+ 0,122
2 — 1	0 ,00	+ 0,15	+ 0 ,65	+ 0,63	+ 0 ,72	— 0,90
1 — 1	+ 0 ,39	+ 0,09	— 5 ,74	— 4.60	— 4 ,48	+ 5.62
0 — 1	+ 0 ,24	— 4.74	+ 21 ,24	+ 8.41	+ 8 .89	— 22,08
1 — 1	— 11 .61	+ 2,91	— 0 ,33	+ 0,21	6 .44	+ 5,53
2 — 1	+ 2 ,13	— 0,21	— 6 ,20	— 1,96	+ 2 ,74	— 6,24
3 — 1	+ 0 .12	0,00	+ 0 ,92	— 0,51	+ 0 ,50	+ 0,89
2 — 2	0 ,00	0,00	+ 0 ,47	— 0,17	— 0 ,12	— 0.40
1 — 2	— 0 ,06	0,00	— 5 ,61	+ 1,49	+ 1 ,43	+ 5,49
0 — 2	+ 1 .32	— 0,24	+ 46 ,36	— 15,06	— 15 ,02	— 40.82
1 2	— 32 ,31	+ 6,93	73 ,92	+ 80,77	+ 80 ,79	+ 70.71
2 — 2	+ 67 .59	— 78,00	+ 14 .55	— 4,03	+ 6 ,81	+ 8,65
3 — 2	— 0 ,06	— 3,99	19 .40	+ 22,75	— 23 ,17	— 20.12
4 — 2	+ 0 .06	— 0,03	+ 0 ,34	+ 1,45	— 1 ,46	— 0.38
1 — 3	— 0 ,0093	— 0,0138	— 0 .4843	+ 0,9333	+ 1 ,0186	+ 0,4805
0 — 3	+ 0 .1941	— 0,2364	+ 3 ,1427	— 8,4289	— 7 ,4576	— 2.9913
1 — 3	— 3 .1209	+ 4,6491	+ 0 ,1183	+ 38,9094	+ 38 ,1108	— 0,4890
2 3	+ 2 .0133	31,6014	— 28 ,1205	— 58,2182	— 52 ,7332	+ 30,2658
3 — 3	+ 28 ,5024	+ 51.3530	1 .7409	+ 11,5680	— 10 ,8542	+ 3.0824
4 — 3	+ 3 ,59	+ 1.91	— 8 ,47	— 15.72	+ 15 .94	— 8,69
5 — 3	0 .00	0,00	1 .28	— 0,86	+ 0 .86	— 1.27

ε, V	$-d\frac{3}{2}\frac{\partial a}{a}$ / dt		$\frac{dY}{dt}$		$\frac{dY'}{dt}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 4	0″,00	0,00	— 1″,02	— 1,56	— 1″,23	+ 0.81
1 — 4	+ 0 .33	+ 0,81	+ 7 ,29	+ 7,07	+ 6 ,57	— 7,13
2 — 4	— 4 .53	5,46	— 27 .40	— 11,50	— 10 ,74	+ 26.65
3 — 4	+ 23 .04	+ 10,89	+ 35 ,25	— 2.19	— 5 .93	— 30,42
4 — 4	— 31 ,05	+ 4,56	— 7 ,13	— 5,24	+ 1 ,29	— 9,37
5 — 4	— 2 ,28	+ 2,01	+ 9 ,01	— 1,31	+ 1 ,41	+ 9,55
6 — 4	0 ,00	0,00	+ 0 ,79	— 0,67	+ 0 ,46	+ 0.69
1 — 5	0 ,00	0,00	+ 2 ,32	+ 0,14	+ 0 .02	— 2,29
2 — 5	— 1 ,50	— 0,25	— 8 ,85	+ 3,10	+ 3 .09	+ 8,54
3 — 5	+ 7 ,02	— 1,83	+ 14 ,43	— 14,10	— 14 ,13	— 12,75
4 — 5	— 12 ,66	+ 12,21	— 6 ,51	+ 17,47	+ 15 ,12	+ 1.35
5 — 5	+ 3 .18	— 15,54	+ 5 ,96	— 3,05	+ 5 ,99	+ 3,29
6 — 5	— 0 .81	— 2,34	— 1 ,01	+ 4,67	— 4 ,88	— 0.93
7 — 5	0 ,00	0,00	+ 0 ,45	— 0,35	— 0 ,94	+ 1,42
0 — 6	0 ,000	0,000	0 ,000	+ 0,040	+ 0 ,02-	+ 0,024
1 — 6	0 ,000	0,000	+ 0 ,306	— 0,429	— 0 ,420	— 0,334
2 — 6	— 0 ,237	+ 0,207	— 0 ,918	+ 2,267	+ 2 ,244	+ 1,007
3 — 6	+ 0 .846	— 1,569	+ 0 ,454	— 7,537	— 7 ,254	— 0,239
4 — 6	— 0 ,735	+ 6,237	+ 4 ,135	+ 12,013	+ 10 ,381	— 5,482
5 — 6	— 3 ,525	— 10,395	— 2 .825	— 7,838	— 1 ,809	+ 3,020
6 — 6	+ 0 .759	+ 3,663	— 2 ,590	+ 3,988	— 3 ,610	+ 1,633
7 — 6	0 ,000	0,000	+ 1 ,815	— 1,049	+ 1 ,023	+ 2,035
8 — 6	0 ,000	0,000	+ 0 .623	+ 0,199	— 0 ,117	+ 0,620
3 — 7	0 .00	0,00	— 0 .69	— 0,67	— 0 ,62	+ 0,58
4 — 7	0 ,00	0,00	+ 4 ,57	+ 2,16	+ 2 .05	— 4.66
5 — 7	— 4 ,08	— 2,19	— 6 ,90	+ 1,09	+ 0 ,12	+ 7,35
6 — 7	+ 6 ,66	— 0,63	+ 4 ,60	— 1,56	— 2 ,93	— 1.42
7 — 7	— 2 .70	+ 2,25	— 2 ,07	+ 0,22	— 0 ,61	— 2,50
8 — 7	— 0 ,21	— 0,12	+ 0 ,80	— 1,10	+ 0 ,45	+ 0,83
9 — 7	0 ,00	+ 0,42	— 0 ,03	+ 0,39	— 0 ,13	0,00
4 — 8	0 ,00	0,00	+ 0 ,81	— 0,28	— 0 ,22	— 0,75
5 — 8	0 ,00	0,00	— 1 ,43	+ 1,63	+ 1 ,58	+ 0,78
6 — 8	+ 0 ,75	— 0.81	+ 0 ,63	— 3.90	— 4 ,06	— 1.97
7 — 8	— 1 ,41	+ 3,96	+ 0 ,84	— 1,83	+ 1 ,86	+ 0,24
8 — 8	— 0 .66	— 1,71	+ 0 .54	— 1.35	+ 1 ,71	+ 0,70
9 — 8	0 ,00	— 0,39	+ 0 .24	— 0,51	— 0 ,64	+ 0,41
6 — 9	0 .00	0,00	— 0 ,74	+ 0,32	— 1 ,25	+ 0.49
7 — 9	+ 0 ,30	+ 0.84	+ 2 ,11	+ 0,87	+ 1 ,80	— 1,86
8 — 9	— 1 ,86	— 1,44	— 0 ,97	+ 0,19	+ 0 ,02	+ 1,10
9 — 9	+ 0 ,99	— 0,15	+ 0 .66	+ 0,54	— 0 ,56	+ 0,56

16.

Für p und q, welche die Breitenstörungen geben sollen, habe ich folgende Reihen bekommen, die mittelst der Formeln

$$\cos\varphi \frac{dq}{d\varepsilon} = (\cos\varepsilon - e)\, ar \frac{\partial\Omega}{\partial Z}$$

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = \sin\varepsilon\, ar \frac{\partial\Omega}{\partial Z}$$

berechnet sind.

Tab. XXVIII.

ε, V	$\cos\varphi\frac{dq}{d\varepsilon}$		$\frac{dp}{d\varepsilon}$		ε, V	$\cos\varphi\frac{dq}{d\varepsilon}$		$\frac{dp}{d\varepsilon}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.		cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 0	— 1/23″,791	——	— 1/2 2″,608	——	0 — 4	+ 0,21	0,00	0,00	— 0,21
1 — 0	+ 2 ,087	+ 0,204	— 0 ,134	+ 1.250	1 — 4	— 0,57	+ 0,28	+ 0,28	+ 0,51
2 — 0	— 1 .770	— 1.243	+ 1 ,330	— 1,695	2 — 4	+ 0.64	— 0,69	— 0.62	— 0,09
3 — 0	+ 0 .199	— 0,140	+ 0 .134	+ 0,196	3 — 4	— 0,56	+ 0,61	— 0.10	— 0.55
					4 — 4	+ 0,17	— 0,78	+ 0.50	+ 0,42
— 2 — 1	— 0 .48	0,00	0 ,00	+ 0,48	5 — 4	+ 0.06	+ 0,21	— 0.18	+ 0,03
— 1 — 1	+ 1 .41	+ 0,09	+ 0 ,09	— 1.25					
0 — 1	— 1 ,09	+ 0.69	+ 0 ,71	— 0,20	1 — 5	— 0,06	+ 0,17	+ 0,17	0,00
1 — 1	+ 0 ,98	— 1,26	— 1 ,26	+ 1,63	2 — 5	— 0,05	— 0,45	— 0,41	+ 0,06
2 — 2	— 0 ,12	+ 1.06	— 0 .66	— 0,35	3 — 5	+ 0.21	+ 0,58	+ 0,14	— 0,32
3 — 1	— 0 ,38	— 1.18	+ 1 ,17	— 0,36	4 — 5	— 0,25	— 0,50	+ 0.40	+ 0,07
					5 — 5	+ 0,37	+ 0,28	— 0.34	+ 0.18
— 2 — 2	— 0 ,07	+ 0.18	+ 0 .18	0,00	6 — 5	— 0.15	0,00	+ 0,01	— 0,13
— 1 — 2	+ 0 ,33	— 0,95	— 0 ,91	— 0,31					
0 — 2	+ 0 ,24	+ 2,56	+ 1 ,97	— 0,46	1 — 6	+ 0.12	+ 0,04	+ 0,04	+ 0.11
1 — 2	— 0 ,21	— 1.85	+ 0 ,53	— 0,73	2 — 6	+ 0,293	— 0,114	— 0.103	— 0.224
2 — 2	+ 1 .15	+ 2,25	— 2 ,14	— 0,27	3 — 6	— 0,37	+ 0,13	+ 0,01	+ 0.08
3 — 2	— 0 .65	— 0,38	+ 0 ,38	— 0,38	4 — 6	+ 0,32	— 0,04	+ 0,18	+ 0.22
4 — 2	+ 0 .67	0,00	0 ,00	+ 0,66	5 — 6	— 0,20	— 0,02	— 0.11	— 0.20
— 1 — 3	— 0 ,10	— 0.18	— 0 ,17	+ 0,10	3 — 7	+ 0,09	0,00	0.00	— 0,09
0 — 3	+ 0 .64	+ 0,54	+ 0 ,44	— 0,60	4 — 7	— 0,11	+ 0.12	+ 0.11	+ 0,09
1 — 3	— 1 ,5219	— 0,5108	— 0 ,0539	+ 1,1617	5 — 7	+ 0,10	— 0.18	— 0,07	+ 0.10
2 — 3	+ 1 .23	+ 0,35	— 0 ,64	+ 0,31	6 — 7	— 0,08	+ 0,15	— 0.10	— 0.10
3 — 3	— 1 ,47	+ 0.13	+ 0 ,33	— 1,13					
4 — 3	+ 0 ,33	— 0,25	+ 0 .17	+ 0,30					
5 — 3	— 0 ,13	+ 0,30	— 0 ,30	— 0,13					

17.

Die obigen Differentiale führen nach Integration zu folgenden Werthen für die Störungen, wo wir nur bemerken, dass

$$Y = \frac{2\delta e}{1 - e^2}$$

$$\Gamma = \frac{2e\delta\pi}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Tab. XXIX.

ε, Γ	$-\frac{3}{2}\frac{\delta a}{a}$		Y		Γ	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 0	—	—	+ 10″,403.ε	—	+ 13″,886.ε	—
1 0	+ 12″,483	— 9,684	— 28 ,198	— 0,738	+ 1 ,178	— 29.835
2 — 0	— 0 ,268	— 0,111	+ 0 .437	+ 1,320	— 1 ,363	+ 0,465
3 — 0	+ 0 ,014	+ 0,014	— 0 ,072	+ 0,039	— 0 ,041	— 0,072
— 2 — 1	0 ,00	0,00	+ 0 .27	— 0,28	— 0 ,39	— 0.31
— 1 — 1	+ 0 ,11	— 0,29	— 3 .46	+ 4,32	+ 4 .23	+ 3.37
0 — 1	+ 0 ,27	— 0,73	+ 25 .66	— 64.81	— 67 ,39	— 27,13
1 — 1	+ 7 ,06	— 17,27	— 0 .32	— 0,49	— 8 .22	— 9.58
2 — 1	— 1 ,74	+ 1,27	+ 1 .17	— 3.71	+ 3 ,73	+ 1.64
3 — 1	+ 0 ,08	+ 0,04	+ 0 .19	+ 0,34	— 0 ,33	+ 0.19
2 — 2	0 ,00	0,00	— 0 .06	0.18	— 0 .15	+ 0,05
— 1 — 2	0 ,00	— 0,04	+ 0 ,90	+ 3.39	+ 3 .32	— 0.86
0 — 2	— 0 ,37	— 2,01	— 22 ,98	— 63.13	— 62 .30	+ 22.93
1 — 2	— 20 ,10	— 93.74	— 234 ,35	— 214.45	— 205 ,15	+ 234.40
2 — 2	+ 58 ,01	— 50,23	+ 3 .00	+ 10,82	— 6 .43	+ 5,06
3 — 2	+ 1 ,70	— 0,03	— 9 ,70	— 8,27	+ 8 ,58	— 9,88
4 — 2	0 ,00	— 0.02	— 0 .43	— 0,10	+ 0 .11	— 0.44
— 1 — 3	— 0 ,01	0,00	+ 0 ,47	+ 0,24	+ 0 ,24	— 0.51
0 — 3	— 0 ,240	— 0,197	— 8 ,574	— 3,197	— 3 ,043	+ 7,586
1 — 3	— 273 .735	— 183,755	— 2290 ,94	+ 6.9-	+ 28 ,79	+ 2243.92
2 — 3	+ 31 ,073	+ 1.800	+ 57 .246	— 27.651	— 29 ,760	— 51.852
3 — 3	— 25 .46	+ 14.13	— 5 .74	— 0.86	— 1 .53	— 5.38
4 — 3	— 0 ,63	+ 1.19	+ 5 ,21	— 2.81	+ 2 .88	+ 5.28
5 — 3	0 ,00	0.00	+ 0 ,22	— 0,32	+ 0 ,32	+ 0,21
0 — 4	0 ,00	0,00	— 1 .19	+ 0,78	+ 0 ,62	+ 0,94
1 — 4	+ 2 .61	— 1,06	+ 22 .75	— 23,46	— 22 .94	— 21,14
2 — 4	+ 7 ,92	— 6,57	+ 16 .68	— 39.76	— 38 .67	— 15,58
3 — 4	— 6 ,45	+ 13,64	+ 1 .30	+ 20,88	+ 18 ,01	— 3,51
4 — 4	— 1 ,69	— 11.54	+ 1 ,95	— 2,65	+ 3 .48	+ 0,48
5 — 4	— 0 ,54	— 0,62	+ 0 ,36	+ 2.44	— 2 .59	+ 0,38
6 — 4	0 ,00	0,00	+ 0 ,14	+ 0.17	— 0 .15	+ 0,10

ε, Γ	$-\frac{3}{2}\frac{\delta a}{a}$		Γ'		Γ	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
1 — 5	0″,00	0,00	+ 0″.22	— 3,63	— 3″,59	— 0,03
2 — 5	+ 0 ,75	— 4,15	— 8 ,57	— 24,47	— 23 ,62	+ 8,55
3 — 5	+ 1 ,34	+ 5,16	+ 10 ,36	+ 10,60	+ 9 ,37	— 10,38
4 — 5	— 5 ,17	— 5,36	— 7 ,40	— 2,76	— 0 ,57	+ 6,40
5 — 5	+ 4 ,62	+ 0,95	+ 0 ,91	+ 1,77	— 0 ,98	+ 1,78
6 — 5	+ 0 ,54	— 0,19	— 1 ,07	— 0,23	+ 0 ,21	— 1,12
7 — 5	0 ,00	0,00	— 0 ,17	+ 0,08	— 0 ,26	— 0,18
0 — 6	0 ,00	0,00	+ 0. 02	0,00	+ 0 ,01	— 0,01
1 — 6	0 .00	0,00	— 0 .444	— 0,317	— 0 ,346	+ 0,435
2 — 6	— 6 ,094	— 6,976	— 66 ,73	— 27,02	— 29 ,64	+ 66,05
3 — 6	+ 1 ,52	+ 0,82	+ 7 .289	+ 0,439	+ 0 ,231	— 7,015
4 — 6	— 3 ,07	— 0,36	— 5 .91	+ 2,03	+ 2 ,70	+ 5,104
5 — 6	+ 3 ,43	— 1.16	+ 2 ,58	— 0,93	— 1 ,00	— 0,60
6 — 6	— 0 .91	+ 0,19	— 0 ,99	— 0,64	— 0 ,40	— 0,89
7 — 6	0 ,00	0,00	+ 0 ,21	+ 0,36	— 0 ,40	+ 0,20
3 — 7	0 .00	— 0,00	+ 0 .95	— 0,99	— 0 ,82	— 0,88
4 — 7	0 ,00	0,00	— 1 ,27	+ 2,73	+ 2 ,73	+ 1.20
5 — 7	+ 0 ,81	— 1,51	— 0 ,40	— 2,59	— 2 ,71	+ 0,04
6 — 7	+ 0 ,17	+ 1,80	+ 0 .42	+ 1,26	+ 0 ,38	— 0,79
7 — 7	— 0 ,48	— 0,57	— 0 ,05	— 0,45	+ 0 ,53	— 0,13
8 — 7	+ 0 ,02	— 0,04	+ 0 ,19	+ 0,14	— 0 ,15	+ 0,08
4 — 8	0 ,00	0,00	+ 0 ,20	+ 0,59	+ 0 ,54	— 0,16
5 — 8	0 ,00	0,00	— 0 ,68	— 0,60	— 0 ,33	+ 0,66
6 — 8	+ 0 ,24	+ 0,22	+ 1 ,15	+ 0,19	+ 0 ,57	— 1,20
7 — 8	— 0 ,90	— 0,32	— 0 ,42	+ 0.19	+ 0 ,05	+ 0,42
8 — 8	+ 0 ,32	— 0.12	+ 0 ,25	+ 0,10	— 0 ,13	+ 0,32
6 — 9	0 ,00	0,00	— 0 ,10	— 0,24	— 0 ,16	— 0,41
7 — 9	— 0 ,21	+ 0,07	— 0 .21	+ 0,52	+ 0 ,46	+ 0,44
8 — 9	+ 0 ,28	— 0,37	— 0 ,04	— 0,19	— 0 ,22	0,00
9 — 9	+ 0 ,02	+ 0,16	— 0 ,09	+ 0,11	— 0 ,09	— 0,09

Ein bemerkenswerther Umstand fällt hier leicht in die Augen, nämlich eine sehr einfache Relation zwischen den Koefficienten in der Entwickelung von Γ' und von Γ. Man kann dieselbe so formuliren, dass

$$[i, i', c] \text{ in } \Gamma' \text{ sehr nahe} = -[i, i', s] \text{ in } \Gamma, \text{ wenn } i < i'$$
$$\text{» » » » » } = +[i, i', s] \text{ » » » } i > i'$$

und

$$[i, i', s] \text{ » » » » } = +[i, i', c] \text{ » » » } i < i'$$
$$\text{» » » » » } = -[i, i', c] \text{ » » » } i > i'$$

Man kann *a priori* zeigen, dass wirklich diese Relationen im Allgemeinen stattfinden müssen. Dieselben sind von Gewicht, erstens weil man mit deren Hülfe auf etwaige Rechenfehler aufmerksam werden kann, und zweitens weil gerade durch diese Relationen

die Ausdrücke für die Störungen der Hansenschen Koordinaten auf viel kürzere und mehr zusammengedrängte Form gebracht werden, als die Elementenstörungen, da diese letzteren bei der Berechnung der vorigen sich gegenseitig aufheben. Es scheint mir dies einer der grössten Vortheile der Hansenschen Koordinaten zu sein.

Die grössten Glieder der obigen Störungsausdrücke sind diejenigen, welche dem Argumente $\varepsilon - 3l'$ entsprechen, und also langer Periode sind. Von diesen werden die Glieder $-273''{,}735$ und $-183''{,}755$ in den Störungen der halben grossen Achse später noch einmal mit dem kleinen Divisor $1 - 3\mu$ dividirt und werden dadurch Glieder von ausserordentlicher Grösse in den Störungen der mittleren Anomalie erzeugen. Dies ist nicht mit den Störungen der Excentricität und der Perihel-Länge der Fall; dagegen sind die in denselben vorkommenden Glieder $-2290''{,}94$ und $+2243''{,}92$ desswegen von grossem Gewicht, weil dieselben zu Gliedern von nahe derselben Grösse in den Störungen der mittleren Anomalie und des Radius Vectors Veranlassung geben, welche Glieder dieselbe Periode haben, wie die Umlaufszeit des Planeten und desshalb auf kürzere Zeit merkbar werden, als die besprochenen Glieder langer Periode.

So grosse Glieder wie diese kommen natürlich nicht in den Störungen der Bahnebene, d. h. in p und q, vor, obgleich auch hier die kleinen Divisoren merkbar werden.

Tab. XXX.

ε, l'	cos qq		p		ε, l'	cos qq		p	
	cos.	sin.	cos.	sin.		cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 0	— 1″,895.ε	——	— 1″,304.ε	——	0 — 4	0″,00	— 0,16	— 0″.16	0,00
1 — 0	— 0 ,204	+ 2,087	— 1 ,250	— 0,134	1 — 4	+ 0 .90	+ 1,83	+ 1 .64	— 0,90
2 — 0	+ 0 ,621	— 0,885	+ 0 ,847	+ 0,665	2 — 4	+ 1 ,00	+ 0,93	+ 0 ,13	— 0,90
3 — 0	+ 0 ,047	+ 0,066	— 0 ,065	+ 0,045	3 — 4	— 0 ,36	— 0,33	+ 0 ,33	— 0,06
— 2 — 1	0, 00	+ 0,21	+ 0 .22	0,00	4 — 4	+ 0 ,29	+ 0,06	— 0 ,16	+ 0,19
— 1 — 1	+ 0 ,07	— 1,06	— 0 ,94	— 0,07	5 — 4	— 0 ,06	+ 0,02	— 0 ,01	— 0,05
0 — 1	+ 2 .10	+ 3,33	— 0 ,61	— 2.17	1 — 5	+ 0 ,27	+ 0,09	0 ,00	— 0,27
1 — 1	+ 1 .87	+ 1.46	— 2 ,42	— 1,87	2 — 5	+ 1 ,25	— 0,14	— 0 ,17	— 1,13
2 — 1	— 0 .63	— 0,07	+ 0 ,21	— 0,39	3 — 5	— 0 ,43	+ 0,15	+ 0 ,24	+ 0,10
3 — 1	+ 0 ,07	— 0,14	+ 0 .13	+ 0,44	4 — 5	+ 0 .15	— 0,11	— 0 ,03	+ 0,17
— 2 — 2	+ 0 ,07	+ 0,03	0 ,00	— 0,07	5 — 5	— 0 ,06	+ 0,11	— 0 ,05	— 0,10
— 1 — 2	— 0 ,57	— 0,20	— 0 ,19	+ 0,55	1 — 6	+ 0 ,05	+ 0,12	+ 0 ,12	— 0,05
0 — 2	+ 3 ,91	— 0,37	— 0 ,70	— 3,01	2 — 6	+ 3 ,36	+ 8,63	+ 6 ,59	— 3,03
1 — 2	+ 5 ,37	— 0,61	+ 2 ,12	+ 1,54	3 — 6	— 0 ,12	— 0,36	— 0 ,08	+ 0,01
2 — 2	— 1 ,67	+ 0,86	+ 0 ,20	— 1,59	4 — 6	+ 0 ,02	+ 0,16	— 0. 11	+ 0,09
3 — 2	+ 0 ,16	— 0,27	+ 0 ,16	+ 0,16	3 — 7	0 ,00	+ 0,13	+ 0 .13	0,00
4 — 2	0 ,00	+ 0,20	— 0 ,20	——	4 — 7	— 0 ,07	— 0,06	— 0 ,05	+ 0,06
— 1 — 3	— 0 ,09	+ 0,05	+ 0 ,05	+ 0,08	5 — 7	+ 0 ,07	+ 0,04	— 0 ,04	— 0,03
0 — 3	+ 0 ,55	— 0,65	+ 0 ,61	— 0,44					
1 — 3	+ 30 ,07	— 89,61	— 68 ,40	— 3,17					
2 — 3	— 0 ,34	+ 1,21	— 0 ,30	— 0.62					
3 — 3	— 0 ,06	— 0,73	+ 0 ,56	+ 0,16					
4 — 3	+ 0 ,08	+ 0,11	— 0 ,10	— 0,06					

18.

Aus den Elementenstörungen sind nun (p. 38) die Störungen der Hansenschen Koordinaten in folgender Weise zusammengesetzt

$$\begin{cases} \dfrac{dn\delta z}{d\varepsilon} = \left[-\dfrac{3}{2}\dfrac{\delta a}{a} + \dfrac{1}{2}e\,Y + Y\cos\varepsilon + I\sin\varepsilon \right](1 - e\cos\varepsilon) \\ 2\dfrac{d\nu}{d\varepsilon} = Y\sin\varepsilon - I\cos\varepsilon \\ \dfrac{u}{\cos i} = \cos\varphi q\,.\,\sin\varepsilon - p(\cos\varepsilon - e)\,. \end{cases}$$

Ich habe mit Hülfe dieser Gleichungen folgende Entwickelung für $n\delta z$, ν und $\dfrac{u}{\cos i}$ erhalten.

Tab. XXXI.

ε, Γ	$n\delta z$		ν		$\frac{u}{\cos i}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 0	— 29″,738.ε	——	— 0″.679.ε	——	+ 1″,671	——
1 — 0	+ 18 .758	+ 28,690	— 6 .718	+ 5,876	— 1 ,03	— 0,66
1 — 0	— 13 ,886.ε	+ 10,325.ε	— 5 ,206.ε	— 6,943.ε	— 0 ,169.ε	— 1,895.ε
2 — 0	— 0 ,360	+ 0,334	— 0 .222	+ 0,055	— 0 ,24	0,00
2 — 0	+ 0 ,452.ε	— 0,339.ε	——	——	+ 1 ,304.ε	——
3 — 0	— 0 .002	— 0,013	+ 0 ,002	+ 0,003	0 .00	——
— 2 — 1	— 0 ,02	— 0,01	+ 0 .01	— 0,01	— 0 ,03	0,0
— 1 — 1	+ 0 ,55	+ 0,10	+ 0 ,38	— 0,61	+ 1 ,63	+ 0,02
0 — 1	+ 26 ,89	+ 26.40	+ 2 ,34	+ 0.62	+ 2 ,86	— 0,21
1 — 1	+ 129 ,59	+ 52.13	— 18 ,58	+ 46.39	— 1 ,81	— 2,40
2 — 1	— 1 ,61	+ 0,54	— 1 ,32	+ 1.40	+ 0 ,37	+ 1,56
3 — 1	— 0 .10	— 0,13	+ 0 .04	0,00	— 0 .05	— 0,04
— 1 — 2	+ 0 .10	+ 0,01	0 ,00	+ 0,07	+ 0 .13	— 0,31
0 — 2	+ 4 ,78	— 5,30	+ 0 ,73	+ 6,11	— 1 ,16	— 4,40
1 — 2	+ 436 .51	— 122,35	+ 39 ,20	+ 103.49	+ 1 .14	+ 5,29
2 — 2	+ 116 .65	— 135.68	+ 83 ,51	+ 74,88	— 0 ,94	+ 1,54
3 — 2	— 5 .29	+ 5,11	+ 0 ,13	— 0.48	— 0 ,31	— 0,02
4 — 2	— 0 .02	+ 0,01	— 0 ,01	— 0,02	+ 0, 02	0,00

ε, V	nb: cos.	nb: sin.	r: cos.	r: sin.	$\frac{u}{\cos i}$: cos.	$\frac{u}{\cos i}$: sin.
−1 −3	+ 0 .33	− 0,54	+ 0 ,12	+ 0.02	− 0 ,34	− 0,04
0 −3	0 .00	− 4.16	+ 12 .21	+ 5.67	− 45 ,03	− 13,59
1 −3	+ 10942 .2	− 16545.0	+ 317 ,81	+ 122,67	+ 34 .21	+ 0.57
2 −3	− 31 .08	− 2175.56	+ 1112 ,05	− 8.62	+ 44 ,25	+ 16.65
3 −3	+ 9 .27	+ 89.09	− 12 ,22	+ 6.41	+ 33 .44	+ 0.09
4 −3	− 0 ,21	− 0.81	+ 0 ,06	+ 0,14	+ 0 ,54	0,00
5 −3	− 0 ,02	− 0,02	0 ,00	0,00	− 0 ,35	0.00
0 −4	− 0 .04	− 0,36	− 0 .30	+ 0.10	+ 0 ,07	0,00
1 −4	− 1 ,34	− 5.15	− 2 .60	+ 2.00	+ 0 ,77	− 0.17
2 −4	+ 42 .05	+ 41,93	− 16 .72	+ 17,87	+ 0 ,11	+ 0,99
3 −4	+ 15 .31	+ 5.30	− 4 .41	+ 10,70	− 0 ,38	+ 0,70
4 −4	− 4 .47	+ 0.16	− 0 .37	− 3,15	− 0 ,03	− 0,07
5 −4	+ 0 .16	+ 0.03	− 0 .08	− 0,03	0 ,00	0.00
1 −5	− 0 .12	+ 0,03	+ 0 ,01	+ 0.33	0 ,00	− 0.10
2 −5	+ 23 .21	+ 2,10	− 0 ,18	+ 5.84	− 0 ,11	+ 0.28
3 −5	+ 14 .41	− 5.49	+ 2 .91	+ 8,43	+ 0 .14	+ 1,04
4 −5	− 2 ,71	+ 2,86	− 1 .91	− 1,82	− 0 .11	− 0,16
5 −5	+ 0 ,34	− 1.09	+ 0 .86	+ 0.21	0 ,00	0,00
6 −5	− 0 .09	− 0.15	+ 0 ,03	− 0.03	——	——
0 −6	− 0 .03	− 0.01	0 ,00	0,00	0 ,00	0,00
1 −6	+ 1 .93	+ 0.32	+ 0 ,18	− 0,67	+ 1 .05	− 0.17
2 −6	+ 212 ,91	− 178.36	+ 8 ,48	+ 6.41	+ 0 .61	− 0,28
3 −6	+ 26 .25	− 62.36	+ 31 .91	+ 13,54	− 7 ,49	+ 3.14
4 −6	− 0 .92	+ 4.47	− 1 ,51	− 0,07	+ 0 ,14	− 0.03
5 −6	− 0 .34	− 1,05	+ 0 ,75	− 0,41	——	——
6 −6	+ 0 .12	+ 0.22	− 0 ,17	+ 0.17	——	——
2 −7	− 0 .24	0.00	− 0 ,05	+ 0,13	——	——
3 −7	+ 0 ,03	− 0,01	− 0 .02	0,00	+ 0 .02	0,00
4 −7	+ 0 .46	+ 0.40	− 0 ,32	+ 0,28	− 0 ,10	− 0,05
5 −7	− 0 ,59	− 0.25	+ 0 ,19	− 0.42	+ 0 .03	0,00
6 −7	+ 0 .37	− 0.02	+ 0 ,02	+ 0,29	——	——
7 −7	− 0 .09	+ 0.05	− 0 ,05	− 0,07	——	——
4 −8	− 0 .09	0.00	0 .00	− 0,05	——	——
5 −8	− 0 .14	+ 0.06	− 0 ,04	− 0,16	——	——
6 −8	+ 0 ,06	− 0.14	+ 0 .10	+ 0,08	——	——
7 −8	− 0 ,04	+ 0.13	− 0 .10	− 0,03	——	——

Interessant sind diese Störungen durch die grossen Koefficienten, die den Argumenten $\varepsilon - 3V$ und $2\varepsilon - 3V$ entsprechen. Unter den mir bekannten Fällen, in denen man die allgemeinen Störungen eines kleinen Planeten nach der Methode von HANSEN berechnet

hat, giebt es kein einziger, wo die Koefficienten eine so bedeutende Grösse erreicht haben. Die Ursache derselben liegt, wie schon erwähnt ist, in dem Vorkommen eines kleinen Divisors 0,017, der bei der doppelten Integration das entsprechende Glied in der Entwickelung von Ω 10800 Mal vergrössert. Das grösste Glied, welches 4°35′ beträgt, ist hauptsächlich durch diese doppelte Integration aus dem Gliede 1″,5497 (p. 92) in $a\frac{\delta\Omega}{\partial\varepsilon}$ erzeugt.

Bei dem Auftreten eines so grossen Gliedes in den Störungsausdrücken kann man, unter Anwendung von der Hansenschen Methode, oder überhaupt von Methoden, die von einer Entwickelung nach den Potenzen der Massen ausgehen, eine sehr grosse Approximation nicht erwarten, sogar wenn man die Störungen höherer Ordnung berücksichtigt. Ich habe es daher als eine nützliche Arbeit betrachtet, die Störungsausdrücke zweiter Ordnung zu berechnen; um so mehr, als mir bekannt ist, dass die Berechnung der *absoluten* Störungen der Thetis nach der Methode von GYLDÉN schon unter Bearbeitung ist. Jedenfalls müssen die erhaltenen Reihen wenigstens als Interpolationsformeln betrachtet werden können, und für eine ziemlich lange Zeit das Berechnen des speciellen Störungen überflüssig machen.

19.

Es bleibt noch die Bestimmung der Integrationskonstanten übrig, welche in der Weise geschehen muss, dass die Störungen für die Epoche gleich Null sind. Ich bezeichne nun die Integrationskonstanten auf folgende Weise:

Die Konstante in	$-\frac{3}{2}\frac{\delta a}{a}$	mit	C_1	in p	mit C_4
»	Y	»	C_2	» $\cos\varphi q$	» C_5
»	Γ	»	C_3	» $n\delta z$	» C_6 ;

wo ich unter C_6 die Konstante, die bei der Integration der Gleichung für $n\delta z$ p. 85 hinzugefügt werden muss, verstehe. Die Integrationskonstante in ν werden wir später ohne besondere Berechnung finden. Mit Hülfe der Tab. XXIX und XXX finde ich zuerst

$$\begin{aligned} C_1 &= +\ 251'',62 & C_4 &= +\ 50'',57 \\ C_2 &= +\ 1054\ ,58 & C_5 &= +\ 74\ ,78 \\ C_3 &= +\ 2406\ ,19 \end{aligned}$$

welche Konstanten zu den Ausdrücken für $n\delta z$ und $\frac{n}{\cos i}$ folgende Glieder hinzufügen

$$\begin{aligned} n\delta z &= C_6 + C_1\varepsilon - C_3\cos\varepsilon + \tfrac{1}{4}eC_3\cos 2\varepsilon + [-eC_1 + C_2 - \tfrac{1}{2}e^2C_2]\sin\varepsilon - \tfrac{1}{4}eC_2\sin 2\varepsilon - \\ &= C_6 + 254'',62\varepsilon + 2406,19\cos\varepsilon - 78'',31\cos 2\varepsilon + 1012'',86\sin\varepsilon - 34'',34\sin 2\varepsilon \\ \frac{n}{\cos i} &= C_4 e - C_4\cos\varepsilon + C_5\sin 2 = +\ 6'',587 - 50'',57\ .\cos\varepsilon + 74'',78\sin\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Und dann findet man

$$C_6 = +\ 5625'',58\ .$$

Nach Hinzufügung dieser Glieder nimmt der von V unabhängige Theil von $nδz$ und $\frac{u}{\cos i}$ folgende Form an, wo wir gleichzeitig die veränderte Form von ν hinsetzen. Wir werden sogleich sehen wie dieselbe entstanden ist.

Tab. XXXII.

ε, V	$nδz$		ν		$\frac{u}{\cos i}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 0	+ 5625″,58	——	— 138″,04	——	+ 8″.25 ·	——
0 — 0	+ 221 ,88.ε	——	— 0 ,679.ε	——	— 0 ,169.ε	——
1 — 0	+ 2424 ,95	+ 1041,55	— 534 ,01	+ 1208.97	— 51 ,60	+ 74,12
1 — 0	+ 13 ,886.ε	+ 10,325.ε	— 5 ,206.ε	— 6.943.ε	+ 1 ,304.ε	— 1,895.ε
2 — 0	— 78 ,70	— 34.67	— 0 ,22	+ 0,05	— 0 ,24	0,00
2 — 0	+ 0,452 .ε	— 0,339.ε	0 ,00	0.00	0 ,00	0,00
3 — 0	0.00	— 0,01	——	——	——	——

20.

Es ist nicht leicht, für das Integrationsresultat eine bequeme Kontrolle zu finden. Ich habe deswegen alle Rechnungen doppelt ausgeführt; überdies habe ich zur Kontrolle ν mit Hülfe der Gleichung

$$-2\nu = \left]-\frac{3}{2}\frac{\partial a}{a}+\frac{1}{2}e\,Y + Y\cos\varepsilon + I\sin\varepsilon\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial a}{a}+\frac{1}{2}e\,Y = \frac{dn\partial z}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\partial a}{a}+\frac{1}{2}e\,Y$$

berechnet, was eine sehr gute und zwar durchgreifende Kontrolle darbietet, da in derselben alle die berechneten Störungsausdrücke zur Anwendung kommen. Die Entwickelung welche ich somit für ν erhielt, war die folgende

Tab. XXXIII.

ε, V	V		ε, V	ν		ε, V	ν	
	cos.	sin.		cos.	sin.		cos.	sin.
0 — 0	+ ½29.016	——	— 1 — 3	+ 0,17	+ 0,02	1 — 6	+ 0,19	— 0,63
0 — 0	— 0,678.ε	——	0 — 3	+ 12,24	+ 5.67	2 — 6	+ 8,34	+ 6,51
1 — 0	— 6,703	+ 5,885	1 — 3	+ 334,33	+ 123.08	3 — 6	+ 31,91	+ 13,70
1 — 0	— 5.206.ε	+ 6,943.ε	2 — 3	+ 1112,06	— 8.62	4 — 6	— 1,64	— 0,08
2 — 0	— 0,222	— 0,058	3 — 3	— 12.53	+ 6,41	5 — 6	+ 0,77	— 0.29
3 — 0	+ 0,002	— 0,002	4 — 3	+ 0.06	+ 0,14	6 — 6	— 0,23	+ 0.20
——	——	——	——	——	——	7 — 6	+ 0,03	+ 0,19

ε, V	ν cos.	ν sin	ε, V	ν cos.	ν sin.	ε, V	ν cos.	ν sin.
− 2 − 1	0,00	0,00	− 1 − 4	+ 0,06	+ 0,04	——	——	——
− 1 − 1	+ 0,36	— 0,56	0 − 4	— 0,32	+ 0,08	2 − 7	— 0,01	+ 0,04
0 − 1	+ 2,34	+ 0,74	1 − 4	— 2,97	+ 2,15	3 − 7	— 0,04	+ 0,06
1 − 1	— 18,59	+ 46,45	2 − 4	— 16,79	+ 17,84	4 − 7	— 0,28	+ 0,28
2 − 1	— 1,34	+ 1,40	3 − 4	— 4,45	+ 10,69	5 − 7	+ 0,20	— 0,42
3 1	+ 0,01	— 0,05	4 − 4	— 0,39	— 3,12	6 − 7	0,00	+ 0,29
——	——	——	5 − 4	— 0,11	— 0,01	7 − 7	— 0,05	— 0,08
− 1 − 2	+ 0,02	+ 0,04	1 − 5	0,00	+ 0,43	4 − 8	0,00	+ 0,02
0 − 2	+ 0,84	+ 6,09	2 − 5	0,00	+ 5,84	5 − 8	— 0,03	— 0,14
1 − 2	+ 38,11	+ 103,48	3 − 5	+ 2,96	+ 8,74	6 − 8	+ 0,16	+ 0,05
2 − 2	+ 83,20	+ 74,62	4 − 5	— 1,93	— 1,54	7 − 8	— 0,13	— 0,03
3 − 2	+ 0,22	— 0,49	5 − 5	+ 0,85	+ 0,18	8 − 8	+ 0,05	0,00
4 − 2	— 0,01	— 0,08	6 − 5	+ 0,38	— 0,15	——	——	——

Die Übereinstimmung zwischen dieser Tabelle und Tab. XXXI ist eine befriedigende. Auf einer einzigen Stelle ist die Differenz von Bedeutung, nämlich für das Argument $\varepsilon - 3V$, wo Tab. XXXI + 317,81 und Tab. XXXIII + 334,33 giebt; die Differenz beträgt hier also 5 Procent des ganzen Betrages des Gliedes. Es ist mir unmöglich gewesen, die Ursache dieses Unterschieds zu finden. Jedenfalls kann dieser Fehler keinen wesentlichen Einfluss auf das Resultat ausüben. Vielleicht wird es mir bei einer zukünftigen Revision der Rechnung möglich, die Ursache aufzufinden.

Mit Hülfe dieser Kontrolle erhalten wir auch den Werth der Integrationskonstante, die in dem Integrale der Differentialgleichung für ν (p. 102) auftreten soll. Die Integrationskonstanten in a, V und U, die nicht in XXXIII berücksichtigt worden sind, fügen noch folgende Glieder hinzu

$$-\tfrac{1}{3}C_1 - \tfrac{1}{2}eC_2 - \tfrac{1}{2}C_2\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}C_3\sin\varepsilon = -152''{,}55 - 527''{,}29\,.\cos\varepsilon + 1203''{,}09\sin\varepsilon\,.$$

und in dieser Weise habe ich die zweite Kolumne in Tab. XXXII erhalten.

21.

Wie es schon p. 2 bemerkt wurde, werde ich, um das beschwerliche Tabuliren zu vermeiden, die obigen Reihen für ndz, ν und $\frac{u}{\cos i}$ durch Einführung des Gyldénschen Argumentes transformiren. Indem wir die Bezeichnungen

$$C_2(\mu) = \left(1 - \frac{\mu^2}{4^2}\right)\left(1 - \frac{\mu^2}{16}\right)$$

$$p_{2n+1} = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n 2^8}{(2n+1)^2[(2n+1)^2 - 4][(2n+1)^2 - 16]} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$p_{2n} = -\frac{8}{n^2 - n^{\frac{1}{2}} + n} \quad (n = 1, 2)$$

$$s_0^{(2)} = -p_n \cos i'' \mu \frac{\pi}{2}$$

$$s_n = \frac{i'' \mu s_0}{1 - \left(\frac{i'' \mu}{n}\right)^2} \cdot p_n$$

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2} s_n \left[1 + \frac{i'' \mu}{n}\right]; \quad \sigma_{-n} = -\tfrac{1}{2} s_n \left[1 - \frac{i'' \mu}{n}\right]$$

$$X_m = \mu[m\pi - c] + c'$$

einführen, so ist erstens

$$e^{\frac{1}{2} i' V} = e^{\frac{1}{2} i' X_m} \sum (-1)^{mn} \sigma_n^{(2)} e^{\frac{1}{2} ni\varepsilon}.$$

Schreiben wir weiter die Ausdrücke für die Störungen F unter der Form

$$F = \sum\sum \{i,\ i',\ c\} \cos(i\varepsilon - i' X_m) + \sum\sum \{i,\ i',\ s\} \sin(i\varepsilon - i' X_m)$$

so sind, wie wir (p. 37) gesehen haben, die neuen Koefficienten durch die folgende Gleichung gegeben

$$\left\{i,\ i',\ \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right\} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j \left[j,\ i',\ \begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\right]$$

wo

$$A_n = (-1)^{mn} \sigma_n^{(2)}$$

Für die Koefficienten σ_n habe ich folgende Werthe bekommen

Tab. XXXIV. $\log \sigma_n$

n	$i=1$	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9,92500	9,65092	8,27891	9,37801n	9,36317n	8,40673n	9,37827	9,36076	8,63184
+ 2	9,04101n	9,16270n	8,08806n	9,48000	9,84320	9,99318	9,93209	9,80984	8,94819
— 2	8,89742	8,86718	7,62072	8,79750n	8,84054n	7,92582n	8,94359	8,93842	8,23097
+ 4	8,0973n	8,1650n	5,3788n	8,2878	8,4263	7,6140	8,8027n	8,8616n	8,3017n
— 4	8,0259	8,0212	5,1608	7,9922n	8,0483n	7,1465n	8,1807	8,1802	7,4815
+ 1	9,56971	9,8868	9,998030	9,99003	9,72934	8,67277	9,56198n	9,52625n	8,76862n
— 1	9,27419n	9,20535n	7,93094n	9,08862	9,11308	8,18500	9,18685n	9,17718n	8,46195n
+ 3	8,60241	8,68617	7,50565	8,85568n	9,03238n	8,27468n	9,62349	9,78995	9,98340
— 3	8,50717n	8,49333n	7,26013n	8,45240	8,50008	7,59328	8,6206n	8,61829n	7,71647n
+ 5	7,4054	7,4649	6,3022	7,5632n	7,6857n	6,8530n	7,9984	8,03760	7,4242
— 5	7,3496n	7,3495n	6,1291n	7,3301	7,3902	6,4923	7,5808n	7,5318n	6,8359n
+ 7	6,2094n	6,2484n	5,0853n	6,3343	6,4415	5,4917	6,7002n	6,7310n	6,0872n
— 7	6,1687	6,1767	4,9627	6,1683n	6,2343n	5,3411n	6,3957	6,3892	5,6971
+ 9	5,459	5,503	4,32	5,566n	5,667n	4,809n	5,91	5,930	5,276
— 9	5,426n	5,439n	4,13n	5,439	5,507	4,62	5,67n	5,670n	4,981n

Diese Werthe habe ich mit Hülfe der leicht erhaltenen Gleichung

$$1 = \sum \sigma_m$$

kontrollirt.

Die Einführung des Argumentes X_m geschieht nun ohne Schwierigkeit; nur muss man bemerken, dass man nun, statt einer Reihe, zwei erhält, von denen eine für m gerade, die andere für m ungerade gilt.

Tab. XXXV. m gerade.

ε, X_m	$n\delta z$		r		$\frac{\omega_u}{\cos i}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 0	+ 5625″,58	——	— 138″,04	——	+ 8″,25	——
0 — 0	+ 221 ,88.ε	——	— 0 ,679.ε	——	— 0 ,169.ε	——
1 — 0	+ 2424 ,95	+ 1041,55	— 534 ,01	+ 1208,97	— 51 ,60	+ 74.12
1 — 0	— 13 ,886.ε	+ 10,325.ε	— 5 ,206.ε	— 6.943.ε	+ 1 ,304.ε	— 1.895.ε
2 — 0	— 78 ,70	— 34.67	— 0 ,22	+ 0,05	— 0 .24	0,00
2 — 0	+ 0 ,452.ε	— 0,339.ε	0 ,00	0.00	0 ,00	——
3 — 0	0 ,00	— 0,01	——	——	——	——

m gerade.

$\varepsilon, X_{..}$	$n\delta z$		r		$\frac{u}{\cos i}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
−4−1	− 0″,25	− 0.20	− 0″,06	+ 0.09	——	——
−3−1	− 0 ,28	+ 0,40	+ 0 ,28	− 0.49	− 0″,06	——
−2−1	+ 2 ,44	− 0,79	− 0 .83	+ 1,52	+ 0 ,18	− 0,09
−1−1	− 3 ,84	+ 4,07	+ 3 ,18	− 5,31	+ 2 ,65	− 0.26
0−1	+ 70 ,84	− 41.48	− 4 ,86	+ 17,69	+ 1 ,37	− 1.24
+1−1	+ 103 ,44	+ 39,12	− 16 ,53	+ 39.39	− 1 ,79	− 1,40
+2−1	− 23 ,68	− 7,22	+ 2 ,56	− 7.58	+ 0 ,80	+ 1,74
+3−1	+ 9 ,57	+ 3,06	− 1 .26	+ 3.37	− 0 ,32	− 0,58
+4−1	− 3 .19	− 1.34	+ 0 .51	− 1,37	+ 0 ,13	+ 0.16
+5−1	+ 1 ,35	+ 0,46	− 0 .15	+ 0.53	− 0 ,03	− 0,02
+6−1	− 0 ,31	− 0,11	+ 0 ,03	− 0,09	——	——
−4−2	+ 1 ,20	− 0,28	+ 0 .10	+ 0,21	——	+ 0,04
−3−2	− 5 .82	+ 1.18	− 0 .56	− 0,99	− 0 ,05	− 0.24
−2−2	+ 18 ,41	− 3,18	+ 0 ,59	+ 3,09	+ 0 .33	+ 0.65
−1−2	− 54 ,03	+ 7,05	− 1 ,09	− 6.66	− 1 ,05	− 4.25
0−2	+ 321 ,31	− 76.68	+ 18 .40	+ 71,56	+ 0 ,45	+ 1,93
+1−2	+ 285 ,30	− 159,21	+ 81 ,75	+ 103,12	+ 0 ,03	+ 4.25
+2−2	− 21 ,54	− 37.55	+ 31 .24	+ 16,99	− 0 .93	− 0.49
+3−2	+ 10 ,91	+ 15,21	− 10 .48	− 4,81	+ 0 .16	+ 0,28
+4−2	− 4 ,11	− 7,22	− 4 .92	+ 2,32	− 0 ,08	− 0.11
+5−2	+ 0 ,54	+ 4.04	− 2 .19	− 1,29	+ 0 ,02	0,00
+6−2	+ 0 .41	− 1,31	+ 0 .78	+ 0.57	——	——
+7−2	− 0 ,31	+ 0.35	− 0 ,19	− 0.17	——	——
−6−3	− 0 .13	+ 0,20	0 .00	——	——	——
−5−3	0 ,00	+ 0,03	0 ,00	——	——	——
−4−3	+ 2 .19	− 3,32	+ 0 ,06	− 0,02	——	——
−3−3	− 0 ,01	− 0,06	+ 0 ,26	+ 0,02	− 0 ,16	− 0,05
−2−3	+ 39 .40	− 59.89	+ 0 ,97	+ 0,39	+ 0 ,33	+ 0.13
−1−3	− 134 ,12	+ 190.67	+ 12 .27	+ 4.09	− 45 ,11	− 13.48
0−3	+ 10899 .41	− 16453,12	+ 303 ,14	+ 122.43	+ 32 ,78	+ 0,18
+1−3	+ 176 ,91	2482,52	+ 1113 ,83	− 6.43	+ 44 ,70	+ 16.70
+2−3	− 93 ,00	+ 188.49	+ 6 ,30	+ 5.19	+ 33 ,65	+ 0,36
+3−3	+ 45 ,87	− 48.01	− 8 ,44	+ 0,83	− 1 ,01	− 0,12
+4−3	− 27 ,26	+ 20,30	+ 4 ,16	− 0,31	− 0 ,50	+ 0,07
+5−3	+ 0 ,26	+ 4.08	− 2 ,02	+ 0,05	+ 0 ,06	——
+6−3	− 1 .49	+ 2,35	− 0 ,02	− 0.03	− 0 ,06	——
+7−3	0 ,00	+ 0.29	− 0 ,15	——	——	——
+8−3	+ 0 .10	− 0.16	0 ,00	——	——	——
−3−4	− 0 ,18	− 0.20	− 0 ,03	− 0.03	——	——
−2−4	+ 0 ,83	+ 1.11	− 0 ,20	+ 0,20	− 0 ,04	——
−1−4	− 3 .14	− 4.81	+ 0 ,04	− 0.37	+ 0 .28	0.12

m gerade.

ε, N_m	$n\delta z$		v		$\frac{u}{\cos i}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 4	+ 10″,32	+ 7,68	— 7″,04	+ 6,36	+ 0″.75	+ 0.10
+ 1 — 4	+ 43 ,59	+ 41.01	— 15 .97	+ 19.27	— 0 ,19	+ 1.16
+ 2 — 4	+ 2 ,40	— 5,74	— 0 ,44	+ 15.24	— 0 .29	+ 0,37
+ 3 — 4	— 2 .45	+ 4.33	— 1 ,21	— 3.35	+ 0 .12	— 0.10
+ 4 — 4	+ 0, 42	— 2.14	+ 0 ,46	+ 1,04	— 0 .03	+ 0,05
+ 5 — 4	— 0 ,35	+ 0,90	— 0 ,20	— 0.60	——	— 0,02
+ 6 — 4	+ 0 .32	— 0.25	+ 0 ,05	+ 0,31	——	——
+ 7 — 4	— 0 .20	+ 0,04	— 0 .01	— 0.16	——	——
— 3 — 5	— 0 ,11	——	——	— 0.03	——	——
— 2 — 5	+ 0 ,56	+ 0,09	——	+ 0,08	——	——
— 1 — 5	— 2 ,19	— 0.37	+ 0 ,10	— 0.16	——	— 0,07
0 — 5	+ 14 ,49	+ 2,17	— 0 ,50	+ 3.29	— 0 ,10	+ 0.04
+ 1 — 5	+ 22 .83	— 3,04	+ 2 ,16	+ 9.11	+ 0 ,05	+ 0.91
+ 2 — 5	+ 0 43	— 1.32	+ 0 ,18	+ 1,92	+ 0 .03	+ 0,39
+ 3 — 5	— 1 ,51	+ 2,33	— 1 .12	— 2,02	— 0 ,10	— 0,28
+ 4 — 5	+ 1 .00	— 2,21	+ 1 ,31	+ 1.20	+ 0 ,06	+ 0,15
+ 5 — 5	— 1 ,47	+ 1.00	— 0 ,62	— 0,68	——	— 0,08
+ 6 — 5	+ 0 ,45	— 0.48	+ 0 ,32	+ 0,37	——	+ 0,04
+ 7 — 5	— 0 ,22	+ 0.21	— 0 ,15	— 0,17	——	——
+ 8 — 5	+ 0 ,09	——	+ 0 ,05	+ 0.03	——	——
— 3 — 6	— 0 ,14	+ 0.13	——	——	——	——
— 2 — 6	+ 0 ,79	— 0,71	+ 0 ,01	+ 0.03	— 0 ,02	——
— 1 — 6	— 2 ,00	+ 3,42	+ 0 ,15	— 0,73	+ 0 .99	— 0,16
0 — 6	+ 209 ,20	— 174,38	+ 7 ,71	+ 6,02	+ 0 ,79	— 0,35
+ 1 — 6	+ 35 ,82	— 69.86	+ 31 ,85	+ 13.65	— 7 .38	+ 3,08
+ 2 — 6	— 5 ,06	+ 6,04	— 0 ,22	+ 0,40	— 0 ,21	+ 0,12
+ 3 — 6	+ 2 ,19	— 1,97	— 0 ,01	— 0.64	+ 0 .20	— 0.08
+ 4 — 6	— 1 ,27	+ 0.61	+ 0 ,29	+ 0,31	— 0 .11	+ 0,05
+ 5 — 6	+ 0 ,69	— 0,09	— 0 ,29	— 0,02	+ 0 ,06	——
+ 6 — 6	— 0 ,19	— 0,06	+ 0 ,13	+ 0,05	— 0 .03	——
+ 7 — 6	+ 0 ,03	+ 0.07	— 0 ,06	——	——	——
— 1 — 7	— 0 ,10	——	——	+ 0,05	——	——
0 — 7	— 0 ,11	——	——	+ 0,09	——	——
+ 1 — 7	+ 0 ,35	+ 0,19	— 0 ,12	+ 0,09	— 0 ,02	— 0,02
+ 2 — 7	+ 0. 04	+ 0,24	— 0 ,20	+ 0.08	— 0 ,08	— 0.04
+ 3 — 7	— 0 ,45	— 0,38	+ 0 ,30	— 0,35	+ 0 ,07	+ 0.02
+ 4 — 7	+ 0 ,67	+ 0,19	— 0 .15	+ 0,45	— 0 .03	— 0,01
+ 5 — 7	— 0 .42	——	+ 0 ,05	— 0,30	+ 0 .03	+ 0.01
+ 6 — 7	+ 0 .25	——	——	+ 0.18	——	——
+ 7 — 7	— 0 .15	——	——	— 0.11	——	——

Tab. XXXVI. m ungerade.

ε. N_m	$n\delta z$		v		$\frac{u}{\cos i}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0 — 0	+ 5625″,58	——	— 138″,04	——	+ 8″.15	——
0 — 0	+ 221 ,88.ε	——	— 0 ,679.ε	——	— 0 ,169.ε	——
1 — 0	+ 2424 ,95	+ 1041.55	— 534 ,01	+ 1208.97	— 51 ,60	+ 74″,12
1 — 0	— 13 ,886.ε	+ 10,325.ε	— 5 ,206.ε	— 6,943.ε	+ 1 .304.ε	— 1 ,895.ε
2 — 0	— 78 ,70	— 34.67	— 0 ,22	+ 0.05	— 0 .24	0 ,00
2 — 0	+ 0 ,452.ε	— 0.339.ε	0 ,00	0.00	0 ,00	——
3 — 0	0 ,00	— 0.01	——	——	——	——
— 4 — 1	— 0 .43	— 0,46	— 0 ,00	— 0,11	— 0 ,10	——
— 3 — 1	— 3 ,08	— 1,72	+ 0 .10	— 0,53	— 0 ,26	——
— 2 — 1	— 8 ,34	— 5.03	+ 0 ,37	— 1,72	— 0 ,88	+ 0 ,09
— 1 — 1	— 23 ,68	— 15.37	+ 1 ,54	— 5,89	+ 0 ,49	+ 0 ,30
0 — 1	— 15 ,20	+ 2,82	+ 9 ,08	— 16.97	+ 3 .35	+ 0 ,54
1 — 1	+ 114 ,76	+ 48,64	— 14 ,67	+ 38.57	— 0 .99	— 2 ,64
+ 2 — 1	+ 25 ,18	+ 12,28	— 4 .42	+ 9,84	+ 0 .26	+ 0 ,88
+ 3 — 1	+ 10 ,71	+ 4,26	— 1 .62	+ 3.93	——	+ 0 ,14
+ 4 — 1	+ 4 .31	+ 1,98	— 0 ,67	+ 1.61	——	— 0 .02
+ 5 — 1	+ 1 ,37	+ 0,62	— 0 ,23	+ 0,45	——	+ 0 ,02
+ 6 — 1	+ 0 ,27	+ 0,13	— 0 ,05	+ 0.11	——	——
— 4 — 2	— 1 ,34	+ 0.44	— 0 .11	— 0.39	——	+ 0 ,08
— 3 — 2	— 6 ,96	+ 2.48	— 0 ,84	— 2.03	+ 0 .05	+ 0 .18
— 2 — 2	— 23 ,64	+ 8.68	— 3 ,21	— 7.05	+ 0 ,03	+ 0 .61
— 1 — 2	— 72 ,71	+ 28,39	— 10 ,31	— 23.36	+ 0 ,83	+ 2 .41
0 — 2	— 350 .95	+ 111.42	— 42 ,04	— 87.88	— 1 .21	— 6 .33
+ 1 — 2	— 107 .06	+ 48.21	— 46 .69	— 10.34	+ 1 ,09	+ 0 ,45
+ 2 — 2	+ 126 ,68	— 84.69	+ 43 .62	— 50,95	— 0, 09	+ 1 ,23
+ 3 — 2	+ 48 ,67	— 28.65	+ 16 ,36	+ 19.63	— 0 ,26	+ 0 .48
+ 4 — 2	+ 21 ,37	— 12.86	+ 7 .40	+ 8.62	— 0 ,06	+ 0 .23
+ 5 — 2	+ 7 .83	— 4.44	+ 3 ,02	+ 3.39	— 0 .04	+ 0 .10
+ 6 — 2	+ 2 ,03	— 1,53	+ 0 ,96	+ 1.01	——	——
+ 7 — 2	+ 0 ,21	— 0,25	+ 0 ,19	+ 0,17	——	——
— 6 — 3	+ 0 ,13	— 0.20	——	——	——	——
— 5 — 3	0 ,00	— 0.03	——	——	——	——
— 4 — 3	— 2 .19	+ 3,32	— 0 ,06	— 0.02	——	——
— 3 — 3	+ 0 ,01	+ 0,84	— 0 ,26	— 0.02	+ 0 .16	+ 0 ,05
— 2 — 3	— 39 .92	+ 60,09	— 1 ,33	— 0,53	+ 0 .77	+ 0 ,21
— 1 — 3	— 133 .90	+ 214.59	— 20 ,05	— 7.09	+ 44 .27	+ 13 .48
0 — 3	— 10898 .65	+ 16506,26	— 329 ,92	— 121,99	— 35 .56	— 0 ,98
+ 1 — 3	+ 238 ,83	+ 1851.40	— 1101 .45	+ 10,91	— 44 ,22	— 16 ,69
+ 2 — 3	+ 91 ,82	— 271.15	+ 36 .06	— 5.47	— 32 .35	+ 0 .18
+ 3 — 3	+ 45 ,83	— 87,77	+ 10 .44	+ 0.43	+ 0 ,53	+ 0 ,12
+ 4 — 3	+ 25 .00	— 38.42	+ 5 .12	+ 0,23	+ 0 .90	+ 0 ,07
+ 5 — 3	+ 0 .14	— 3,82	+ 2 ,02	+ 0.01	+ 0 .22	——
+ 6 — 3	+ 1 ,49	— 2,41	+ 0 ,02	+ 0,03	+ 0 ,06	——
+ 7 — 3	0 ,00	— 0.29	+ 0 ,15	——	——	——
+ 8 — 3	— 0 .10	+ 0.16	——	——	——	——

m ungerade.

ε, X_m	$n\delta z$		r		$\frac{u}{\cos i}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
−3 −4	+ 0″,12	+ 0,04	− 0″,13	+ 0,11	——	——
−2 −4	+ 0 ,77	+ 0,29	− 0 ,62	+ 0,56	+ 0″,08	——
−1 −4	+ 2 ,14	+ 1,87	− 1 ,80	+ 1,99	+ 0 ,18	+ 0,02
0 −4	+ 14 ,92	+ 17,82	− 2 ,94	+ 4,26	− 0 ,73	+ 0,50
+1 −4	+ 33 ,71	− 35,35	+ 0 ,01	− 13,77	− 0 ,41	− 0,66
+2 −4	− 25 ,18	− 14,14	+ 8 ,24	− 15,24	+ 0 ,21	− 0,89
+3 −4	− 4 ,61	− 6,21	+ 3 ,59	− 1,99	+ 0 ,16	− 0,22
+4 −4	− 3 ,56	− 3,20	+ 1 ,82	− 1,76	+ 0 ,03	− 0,13
+5 −4	− 1 ,63	− 1,52	+ 0 ,86	− 0,82	——	− 0,06
+6 −4	− 0 ,58	− 0,57	+ 0 ,33	− 0,29	——	——
+7 −4	− 0 ,12	− 0,14	+ 0 ,09	− 0,06	——	——
−3 −5	+ 0 ,11	——	——	+ 0,03	——	——
−2 −5	+ 0 ,68	+ 0,01	——	+ 0,24	——	——
−1 −5	+ 2 ,79	+ 0,11	+ 0 ,06	+ 1,08	——	− 0,01
0 −5	+ 17 ,71	+ 0,93	+ 0 ,14	+ 4,75	− 0 ,06	+ 0,36
+1 −5	− 2 ,65	− 4,68	+ 1 ,95	+ 2,47	+ 0 ,15	+ 0,91
+2 −5	− 14 ,91	+ 4,32	− 2 ,76	− 7,16	− 0 ,13	− 0,71
+3 −5	− 4 ,65	− 1,31	+ 1 ,96	− 1,58	+ 0 ,04	− 0,18
+4 −5	− 3 ,10	+ 0,37	− 0 ,37	− 1,22	+ 0 ,02	− 0,11
+5 −5	− 2 .13	+ 0,28	− 0 ,16	− 0,58	——	− 0,06
+6 −5	− 0 ,55	+ 0,12	− 0 ,08	− 0,23	——	+ 0,02
+7 −5	− 0 ,14	+ 0.05	− 0 ,03	− 0,05	——	——
+8 −5	——	——	− 0 ,01	+ 0,01	——	——
−3 −6	+ 0 ,16	− 0.13	——	——	——	——
−2 −6	+ 0 ,91	− 0,77	+ 0 ,05	+ 0.03	+ 0 ,02	——
−1 −6	+ 6 ,02	− 3,30	+ 0 ,47	− 0,43	+ 1 ,01	− 0.16
0 −6	+ 210 ,00	− 176,74	+ 8 ,91	+ 6,60	+ 0 ,41	− 0,21
+1 −6	+ 15 ,76	− 52,92	+ 30 ,99	+ 13,05	− 7 ,44	+ 3,10
+2 −6	− 7 ,60	+ 11,86	− 3 ,20	− 0,86	+ 0 ,45	− 0,18
+3 −6	− 4 ,25	+ 3,07	− 0 ,13	− 0,84	+ 0 ,16	− 0,08
+4 −6	− 2 ,05	+ 2,61	− 0 ,77	− 0,07	+ 0 ,11	− 0,05
+5 −6	− 0 ,97	+ 1,15	− 0 ,29	− 0.10	+ 0 ,06	——
+6 −6	− 0 ,39	+ 0,46	− 0 ,13	− 0,05	+ 0 ,03	——
+7 −6	− 0 ,11	+ 0,13	− 0 ,04	——	——	——
−1 −7	+ 0 ,10	——	——	− 0,05	——	——
0 −7	− 0 ,37	——	——	+ 0,09	——	——
+1 −7	− 0 ,21	− 0,15	+ 0 ,10	− 0,03	+ 0 ,06	+ 0.02
+2 −7	+ 0 ,56	+ 0,46	− 0 ,38	− 0,42	− 0 ,10	− 0,04
+3 −7	− 0 ,53	− 0,06	+ 0 ,02	− 0,35	− 0 ,01	− 0,02
+4 −7	+ 0 ,15	——	+ 0 ,03	− 0,21	− 0 ,01	+ 0,01
+5 −7	− 0 ,02	——	− 0 ,03	− 0,02	− 0 ,01	− 0,01

Diese Koefficienten sind nach der p. 78 angewandten Methode kontrollirt worden, wie überhaupt die ganze Rechnung nach dem daselbst gegebenen Verfahren ausgeführt worden ist. Die Kontrollen, die ich für diese Transformationen erhielt, sind in den folgenden Tafeln zusammengestellt.

Tab. XXXVII. m gerade. $\varepsilon = 0$.

i'	$n\delta z$		r		$\frac{u}{\cos i}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
1	155″.30	− 88.41	− 17″.12	+ 47.76	+ 2″,93	− 1,16
2	+ 552 .62	— 258.34	+ 123 ,54	+ 183,95	— 1 .11	+ 2,18
3	+ 10910 .19	— 18640.98	+ 1430 ,36	+ 126,25	+ 66 ,70	+ 3,80
4	+ 51 .58	+ 41.95	— 24 ,49	+ 27,49	+ 0 ,60	+ 1.42
5	+ 34 ,97	— 1.67	+ 1 ,72	+ 12,95	— 0 ,06	+ 1,10
6	+ 240 ,06	— 236.90	+ 39 .56	+ 19,07	— 5 ,71	+ 2.66
7	+ 0 ,03	+ 0,21	— 0 ,15	+ 0.21	0 .04	0,00

Tab. XXXVIII. m gerade. Kontrolle.

i'	$n\delta z$		r		$\frac{u}{\cos i}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
1	+ 155″.29	− 88,67	— 17″,12	+ 47,79	+ 2″,96	− 1,25
2	+ 552 ,62	— 258.37	+ 123 ,47	+ 183,93	— 1 ,12	+ 2,09
3	+ 10913 .29	— 18642.89	+ 1430 ,42	+ 126,19	− 66 ,71	+ 3,67
4	− 51 ,66	+ 41,97	— 24 ,41	+ 27,57	+ 0 ,56	− 1.44
5	+ 35 .01	— 1,70	+ 1 ,69	− 12,95	— 0 ,06	+ 1,06
6	+ 240 ,04	— 236,84	+ 39 ,61	+ 19.03	— 5 ,67	+ 2.66
7	— 0 ,01	+ 0,17	— 0 ,23	+ 0,21	— 0 ,04	0,00

Tab. XXXIX. m ungerade. $\varepsilon = 0$.

i	$n\delta z$		r		$\frac{u}{\cos i}$	
	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
1	+ 95″,84	+ 58,39	— 10″,58	+ 29,30	+ 1″,83	— 0,70
2	— 141 ,86	+ 66,54	— 31 ,64	— 47,29	+ 0 ,35	— 0,64
3	— 10671 ,53	+ 18233.80	— 1399 .26	— 123,49	— 65 .24	— 3,58
4	— 50 ,66	— 41.15	+ 23 ,99	+ 26.99	— 0 .48	— 1,42
5	— 6 ,09	+ 0.25	— 0 ,30	— 2,25	— 0 .02	— 0,16
6	+ 217 ,48	— 214.66	+ 35 .86	+ 17,27	— 5 .19	+ 2,42
7	— 0 .13	— 0,29	— 0 .29	+ 0,29	— 0 ,06	0.00

Tab. XXXX. m ungerade. Kontrolle.

i'	$n\delta z$ cos.	$n\delta z$ sin.	r cos.	r sin.	$\frac{u}{\cos i}$ cos.	$\frac{u}{\cos i}$ sin.
1	+ 95".87	+ 58.47	— 10".58	+ 29.47	+ 1".84	— 0.75
2	— 141 .86	+ 66.43	— 31 .63	— 47.35	+ 0 .34	— 0.55
3	— 10674 .67	+ 18235.67	— 1399 .20	— 123.43	— 65 .25	— 3.59
4	— 50 .62	— 41.11	+ 23 .91	— 27.61	— 0 .54	— 1.42
5	— 6 .15	+ 0.28	— 0 .27	— 2.21	+ 0 .02	— 0.18
6	+ 217 .48	— 214.56	+ 35 .93	+ 17.25	— 5 .13	+ 2.42
7	— 0 .13	+ 0.23	— 0 .29	— 0.27	— 0 .06	0.00

Bei praktischer Anwendung empfiehlt es sich, die obigen Reihen unter der folgenden Form zu schreiben

$$F = C_0 + C_1 \cos \varepsilon + C_2 \cos 2\varepsilon + \ldots + S_1 \sin \varepsilon + S_2 \sin 2\varepsilon + \ldots .$$

wo die Grössen C und S Funktionen nur von X_m sind, und also während eines halben Umlaufes des Planeten konstante Werthe haben. Da die Ausdrücke dieser Koefficienten, nach den Vielfachen von X_m entwickelt, aus den gegebenen Reihen durch eine sehr einfache Rechnung erhalten werden, so ist es unnöthig, dieselben hier abzudrucken. Ich bemerke nur, dass man am bequemsten verfährt, wenn man gleichzeitig mit dieser Rechnung Glieder von der Form $C \cdot \varepsilon$, $C_1 \cdot \varepsilon \cos \varepsilon$, $S_1 \cdot \varepsilon \sin \varepsilon$, $C_2 \cdot \varepsilon \cos 2\varepsilon$, $C_2 \cdot \varepsilon \sin 2\varepsilon$ nach den Vielfachen von ε entwickelt, was leicht mit Hülfe der Gyldénschen Reihe für ε geschehen kann.

Um die praktische Form, die man durch Einführen des Argumentes X_m für die Störungen bekommt, mit einem Beispiel zu beleuchten, theile ich hier den Ausdruck für $n\delta z$, im Falle $m = 2$, mit:

$$\begin{aligned} n\delta z \quad & — 2688'',2 \\ & + 116\,,7 \cos \varepsilon — 483,2 \sin \varepsilon \\ & + 10\,,9 \cos 2\varepsilon + 233,1 \sin 2\varepsilon \\ & — 26\,,4 \cos 3\varepsilon — 75,2 \sin 3\varepsilon \\ & + 6\,,0 \cos 4\varepsilon + 45,2 \sin 4\varepsilon \\ & + 2\,,7 \cos 5\varepsilon — 2,5 \sin 5\varepsilon \\ & + 1\,,2 \cos 6\varepsilon + 3,9 \sin 6\varepsilon \\ & — 0\,,2 \cos 7\varepsilon — 0,5 \sin 7\varepsilon . \end{aligned}$$

Durch die zuvorkommende Gefälligkeit des Herrn Prof. TIETJEN in Berlin ist es mir möglich gewesen, die erhaltenen Ausdrücke der Störungen mit den von dem eben abgestorbenen Dr MAYWALD erhaltenen speciellen Störungsausdrücken zu vergleichen. Da die grössten Störungen in der Perihelii-Länge vorkamen, theile ich das Resultat der Vergleichung zwischen dem aus Tab. XXIX erhaltenen Werthe des Γ mit dem von Dr MAYWALD erhaltenen mit.

Tab. XXIX giebt für 1885 Dec. 8,0

$$\Gamma = 201'',7 .$$

Dagegen erhält Dr MAYWALD aus der speciellen Störungsrechnung

$$\Gamma = 171'',4 .$$

Die Differenz ist, wie mir scheint, nicht grösser, als man es bei einem Planeten erwarten könnte, der, wie Thetis, Störungen hat von der Ordnung der Excentricität der Keplerschen Ellipse.

2. Om Vestergötlands Cambriska och siluriska aflagringar; af J. G. O. Linnarsson. (med 2 taflor) ..... (90 sid.) 2,00.
3. Jodgasens absorptionsspektrum; af Ron. Thalén. (med 3 taflor). (12 sid.) 1,00.
4. Flora fossilis Alaskana. Fossile Flora von Alaska; von Osw. Heer. (mit 10 Tafeln) ..... (42 sid.) 3,00.
5. Bidrag till kännedomen om Beeren Eilands och Spetsbergens Insektfauna; A. E. Holmgren ..... (56 sid.) 1,50.
6. Recherches expérimentales sur la marche d'intensité des courants d'induction voltaïque; par K. S. Lemström. (avec 4 planches) ..... (86 sid.) 2,50.
7. Die miocene Flora und Fauna Spitsbergens; von Osw. Heer. Mit einem Anhang über die Deluvialen Ablagerungen Spitsbergens. (mit 16 Tafeln) ..... (98 sid.) 5,00.
8. Magnetiska observationer under Svenska Polarexpeditionen år 1868; af K. S. Lemström ..... (48 sid.) 1,25.
9. Meteorstensfallet vid Hessle den 1 Januari 1869; af A. E. Nordenskiöld. (med 2 taflor) ..... (14 sid.) 1,00.
10. Om elektriciteten som kosmisk kraft; af K. A. Holmgren. (med 1 tafla). (46 sid.) 1,50.
11. Meteorologiska iakttagelser, anställda på *Beeren Eiland* vintern 1865—1866 af S. Tobiesen, och inom *Norra Polarhafvet* sommaren 1868 af F. W. v. Otter och L. Palander; meddelade af A. E. Nordenskiöld (20 sid.) 0,75.

Nionde Bandet (1871, 1872). Fullst. 20 Rdr.

1. Enumeratio Hemipterorum. Bidrag till en förteckning öfver alla hittills kända Hemiptera, jemte system. meddel. 1:a afd., af C. Stål, (232 sid.) 4,00.
2. Hvaldjur i Sveriges Museer år 1869; af A. W. Malm. Med 6 tafl. (104 sid.) 4,00.
3. Undersökning af Planeten Pandoras rörelse; af A. Möller (122 sid.) 3,00.
4. Om salthalten i hafsvattnet utmed Bohuslänska kusten; af L. F. Ekman. Med 1 tafla ..... (44 sid.) 1,00.
5. Fossile Flora der Bären-Insel; von Oswald Heer. Mit 15 Tafeln. (51 sid.) 5,00.
6. A Description of the Anthozoa perforata of Gotland; by G. Lindström. With 1 Plate ..... (12 sid.) 1,50.
7. Geognostiska och paleontologiska iakttagelser öfver Eophytonsandstenen i Vestergötland; af J. G. O. Linnarsson. Med 5 taflor ..... (19 sid.) 2,50.
8. Skandinaviens Neuroptera; af H. D. J. Wallengren. 1:a Afdeln. Neuroptera planipennia ..... (76 sid.) 2,00.
9. Om geometriska ytor, af A. V. Backlund ..... (64 sid.) 1,50.
10. Bidrag till kännedomen af den jordmagnetiska intensiteten och inklinationen i mellersta och södra Sverige af G. Lundquist ..... (56 sid.) 1,50.
11. Om Nerikes lafvegetation; af P. J. Hellbom ..... (91 sid.) 2,00.
12. On the geology of the North-Eastern West India Islands; By P. T. Cleve. With 2 plates ..... (48 sid.) 1,50.
13. Beskrivelse af de på Fregatten Josephines Expedition funde Cumaceer; af G. O. Sars. Med 20 tavler ..... (57 sid.) 5,00.
14. Recherches sur la force électromotrice dans le contact des métaux et sur la modification de cette force par la chaleur; par E. Edlund. Avec 1 pl. (44 sid.) 1,50.
15. Om elektriciteten som kosmisk kraft. II; af K. A. Holmgren. 2:a h. (12 sid.) 0,75.

Tionde Bandet (1871). Fullst. 12 kr.

1. Försök att teoretiskt bestämma krutets verkan i kanoner; af Fab. Wrede. Med 8 taflor ..... (42 sid.) 3,00.
2. Om Arsenikens sulfurer och deras föreningar; af L. F. Nilsson. (85 sid.) 2,00.
3. Teori för algebraiska equationers rötter; af C. F. E. Björling. Med 3 taflor ..... (53 sid.) 2,00.
4. Enumeratio Hemipterorum. Bidrag till en förteckning öfver alla hittills kända Hemiptera, jemte systematiska meddelanden. 2:a afd.; af C. Stål (159 sid.) 3,00.
5. Om afsöndringen af växtslem uti kropparne hos familjen Polygoneæ Juss; af P. G. Theorin. Med 1 tafla ..... (39 sid.) 1,00.
6. Om proportionen mellan köuen bland de födde och inom den stående befolkningen, med hänsyn till Sverige och dess provinsiela olikheter; af Fr. Th. Berg. Med 3 taflor ..... (40 sid.) 3,00.
7. Description d'un météorographe énégistreur imprimeur construit aux frais du Gouvernement Suédois; par A. G. Theorell. Avec 3 planches. (10 sid.) 2,00.
8. Bidrag till kännedomen af Grönlands Luminarieer och Fucaceer; af J. G. Agardh ..... (31 sid.) 1,00.
9. On ammoniacal Platinum Bases; by P. T. Cleve ..... (107 sid.) 2,00.
10. Sveriges Podurider; beskrifna af T. Tullberg. Med 12 taflor (70 sid.) 4,50.
11. Floridan Bryozoa, collected by Count L. F. de Pourtales, described by F. A. Smitt. Part. I. With 5 plates ..... (20 sid.) 2,50.
12. Jordmagnetiska bestämningar i Sverige under åren 1869—1871; af Robert Thalén. Med 2 taflor ..... (80 sid.) 2,00.
13. Observationer öfver jordmagnetiska horizontalintensiteten och inklinationen inom Vesterbotten och Lappland; af L. A. Forssman ..... (26 sid.) 1,00.

Elfte Bandet (1872—1876). Fullst. 25 kr.

1. Om summation af periodiska funktioner; af H. Gyldén ..... (15 sid.) 0,75.
2. Enumeratio Hemipterorum. Bidrag till en förteckning öfver alla hittills kända Hemiptera, jemte systematiska meddelanden; af C. Stål. 3:e afd. (163 sid.) 4,00.
3. Mikrometrisk bestämning af 104 stjernor inom stjerngruppen 20 Vulpeculæ; af Dr Herman Schultz. Med 1 karta ..... (78 sid.) 3,00.
4. Floridan Bryozoa, collected by Count L. F. de Pourtales, described by F. A. Smitt. Part II. With 13 plates ..... (83 sid.) 5,00.
5. Beskrivelse af syv nye Cumaceer fra Vestindien og det Syd-Atlantiske Ocean; af G. O. Sars. Med 6 Tavler ..... (30 sid.) 3,00.
6. Om Cumaceer fra de store Dybder i Nordishavet; af G. O. Sars. Med 4 Tavler ..... (12 sid.) 2,00.
7. [illegible]ndea sur les Echinoidées; par S. Lovén. Avec 53 planches et explications. ..... (91 sid.) 18,00.
8. [illegible]triciteten som kosmisk kraft. III; af K. A. Holmgren. Med ... . (43 sid.) 1,50.
9. Integration af vissa i störingstheorin förekommande differentialformler, af Hugo Gyldén ..... (95 sid.) 2,00.

Tolfte Bandet (1873). Fullst. 15 kr.

1. Enumeratio Hemipterorum. Bidrag till en förteckning öfver alla hittills kända Hemiptera jemte systematiska meddelanden; af C. Stål. 4:e afd. (186 sid.) 3,50.
2. Bidrag till kännedomen af Sveriges klimat; af E. Edlund. Med 2 kartor (17 sid.) 2,00.
3. Beiträge zur Steinkohlenflora der arctischen Zone; von O. Heer. Mit 6 Tafeln ..... (11 sid.) 2,00.
4. Om Spectra tillhörande yttrium, erbium, didym och lanthan; af T. R. Thalén. Med 1 tafla ..... (24 sid.) 1,00.
5. Undersökningar öf. metallen beryllium's föreningar; af A. Atterberg 38 sid.) 1,00.
6. Die Kreideflora der arctischen Zone, gegründet auf die von den schwedischen Expeditionen von 1870 und 1872 in Grönland und Spitzbergen gesammelten Pflanzen; von O. Heer Mit 38 Tafeln Abbildungen (138 sid.) 7,00.
7. Observations météorologiques de l'Expedition arctique suédoise 1872—1873, rédigées par A. Wijkander. Avec 1 planche ..... (120 sid.) 2,00.
8. Théorie des phénomènes électriques; par E. Edlund ..... (73 sid.) 1,60.
9. Vexillaria speciosa, N. Sp. Ett bidrag till Appendiculariornas anatomi; af G. Eisen. Med 3 taflor ..... (15 sid.) 1,50.

Trettonde Bandet (1876). Fullst. 20 kr.

1. Bidrag till kännedomen om Pennatulidslägtet Renilla Lamk; af G. Eisen. Med 3 taflor ..... (15 sid.) 1,50.
2. Nachträge zur miocenen Flora Grönlands, enthaltend die von der schwedischen Expedition im Sommer 1870 gesammelten miocenen Pflanzen; von Oswald Heer. Mit 5 Tafeln ..... (29 sid.) 2,50.
3. Om Pennatulidslägtet Umbellula; Cuv.; af Josua Lindahl. Med 3 taflor ..... (22 sid.) 1,75.
4. Ueber eine vollständige geometrische Darstellung einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen; von C. F. E. Björling. Mit 1 Tafel (40 sid.) 1,75.
5. Descriptions of several European and North-African spiders; by T. Thorell ..... (204 sid.) 7,75.
6. Descriptions des Echinides tertiaires des îles St. Barthélemy et Anguilla par M. Cotteau. Avec 8 planches ..... (48 sid.) 4,00.
7. Musci et Hepaticæ Spetsbergenses. Bericht über die Untersuchung der Moosflora Spitzbergens und Beeren-Eilands während der schwedischen Expeditionen 1864 und 1868 und Verzeichniss der dort gesammelten Arten; von S. Berggren ..... (103 S.) 4,00.
8. Undersökning af mossfloran vid Disko-bugten och Auleitsivikfjorden i Grönland; af S. Berggren ..... (46 sid.) 1,80.
9. Astronomiska observationer under den svenska arktiska expeditionen 1872—73. I. Tids- och ortbestämningar, sammanställda af Aug. Wijkander (55 sid.) 2,25.
10. Nederbördsmängden i Sverige, bärledd ur de vid Statens meteorologiska stationer under åren 1860—1872 anställda iakttagelser; af R. Rubenson. Med 5 taflor ..... (29 sid.) 2,50.
11. Observationer öfver vattenhöjden vid Sveriges kuster, bearbetade af L. A. Forssman. Med 1 tafla ..... (23 sid.) 1,25.
12. Dispositio synoptica Mesoleiorum Scandinaviæ; auct. A. E. Holmgren (51 sid.) 2,00.
13. Musci et Hepaticæ Finmarkiæ circa sinum Altensem crescentes; auctore J. E. Zetterstedt ..... (42 sid.) 1,50.
14. Musci et Hepaticæ Gotlandiæ; auctore J. E. Zetterstedt.. .. (42 sid.) 1,50.
15. Observations magnétiques, faites pendant l'expédition arctique suédoise en 1872—1873, rédigées par Aug. Wijkander. I ..... (121 sid.) 4,50.

Fjortonde Bandet. Första häftet (1876). Fullst. 18 kr.

1. Bidrag till Skandinaviens Helminthfauna I; af P. Olsson. Med 4 taflor ..... (35 sid.) 2,00.
2. Recherches sur le Phascolion Strombi (Mont.); par Hj. Theel. Avec 3 planches. ..... (32 sid.) 2,00.
3. Bidrag till Sveriges fossila flora; af A. G. Nathorst. Med 16 taflor. (82 sid.) 5,50.
4. Enumeratio Hemipterorum. Bidrag till en förteckning öfver alla hittills kända Hemiptera, jemte systematiska meddelanden; af C. Stål. 5:te Afd. (162 sid.) 4,50.
5. Beiträge zur fossilen Flora Spitzbergens, gegründet auf Sammlungen der Schwedischen Expedition vom Jahre 1872 auf 1873; von Osw. Heer. Mit einem Anhang: Uebersicht der Geologi des Eisfjordes und des Belsoundes vom Prof. A. Nordenskiöld. Mit 32 Taf. ..... (141 sid.) 10,00.

Andra häftet (1876). Fullst. 12 kr.

6. Contributions to the Actinology of the Atlantic Ocean; by G. Lindström. With 3 plates ..... (26 sid.) 1,75.
7. Månads- och årsmedia af temperaturen på Statens meteorologiska stationer under åren 1859—1872; af R. Rubenson ..... (22 sid.) 0,75.
8. Mémoire sur l'Elpidia. Nouveau genre d'Holoturies; par Hj. Theel. Avec 5 planches. ..... (30 sid.) 2,25.
9. Untersuchung über die Wärmeerscheinungen in der galvanischen Säule, und über die elektromotorischen Kräfte; von E. Edlund ..... (24 sid.) 1,25.
10. Om storleken af temperaturens dagliga varation i Sverige; af R. Rubenson ..... (33 sid.) 1,00.
11. Den hithörande handlingen har af förekommen anledning blifvit postponerad.
12. Sibiricus land- och sötvattens mollusker I; af C. A. Westerlund. Med 1 tafla. ..... (111 sid.) 3,00.
13. Om Sveriges vigtigare diabas- och gabbro-arter; af A. E. Törnebohm. ..... (55 sid.) 1,50.
14. Om trias-förseningar från Spetsbergen; af P. Öberg. Med 5 taflor (19 sid.) 2,00.
15. Observations magnétiques, faites pendant l'expédition arctique suédoise en 1872—1873. II; par A. Wijkander. Avec 14 planches (53 sid.) 5,50.

Femtonde Bandet (1877). Fullst. 25 kr.

... Bryologica montium Hunneberg et Halleberg, auctore J. E. ... ndt ..... (35 sid.) 1,00.
...sökning af planeten Pandoras rörelse, andra afdelningen, af Axel ... (230 sid.) 5,00.
... fossile Pflanzen von Nowaja Semlja, von Oswald Heer. Mit 1 ... (6 sid.) 0,50.
...rage zur miocenen Flora von Sachalin, von Oswald Heer. Mit 4 ... (11 sid.) 1,50.
...logne des aurores boréales observées en Suède depuis le XVIme siècle ... l'année 1877 y comprise, rédigé par R. Rubenson. 1ere partie ... 1799). ..... (184 sid.) 4,00.
... cernas morphologi, af J. G. Agardh. Med 33 taflor... (199 sid.) 14,00.
... ne Oligochæta collected during the Swedish expeditions to the ... regions in the years 1870, 1875 and 1876, by Gustaf Eisen. ... 16 plates..... (49 sid.) 5,50.

Sextonde Bandet (1878). Fullst. 18 kr.

...erches sur l'induction unipolaire, l'électricité atmosphérique et l'aurore ...ale, par E. Edlund..... (36 sid.) 1,25.
...rsigt öfver de af svenska expeditionerna till Novaja Semlja och ...ei 1875 och 1876 insamlade hafsmollusker, af Wilhelm Leche. ... 2 taflor..... (85 sid.) 3,00.
...annélides polychetes des mers de la Nouvelle-Zemble, par Hj. Théel. ... 4 planches..... (75 sid.) 4,00.
...g ... Nordvestra Sibiriens insektfauna, Hemiptera Heteroptera, in... ...ade under expeditionerna till Obi och Jenisei 1876 och 1877, för... ...ade af John Sahlberg ..... (39 sid.) 1,00.
...hniden aus Sibirien und Nowaja Semlja, eingesammelt von der ...edischen Expedition im Jahre 1875, beschrieben von Doctor L. Koch. ... 7 Tafeln..... (136 sid.) 6,50.
...rsökning af badgytjan vid Marstrand, af N. P. Hambero (32 sid.) 1,25.
...g till Sveriges fossila flora. II. Floran vid Höganäs och Helsing... ... Af A. G. Nathorst. Med 8 taflor..... (53 sid.) 3,50.

Sjuttonde Bandet (1879). Fullst. 30 kr. 50 öre.

...r die Bahn eines materiellen Punktes, der sich unter dem Ein... ...e einer Centralkraft von der Form: $\frac{\mu_1}{r^3} + \mu_2 r$ bewegt. Von H. Gyl... ..... (67 sid.) 2.50.
...räge zur Kenntniss der arctischen Diatomeen, von P. T. Cleve und ...Grunow. Mit 7 Tafeln nebst Erklärungen ..... (121 sid.) 5,50.
...Sveriges Hydrachnider, af C. J. Neuman. Med 14 taflor (123 sid.) 17,50.
...ag till Nordvestra Sibiriens insektfauna. Coleoptera, insamlade under ...ditionerna till Obi och Jenisei 1876 och 1877, forteeknade af John ...Lebo. I. Med 1 tafla ..... (115 sid.) 3,00.
...ttagen af författaren.
...ographia Arthoniarum Scandinaviæ, auctore S. Almquist. (69 sid.) 2,00.

Adertonde Bandet (1880). Fullst. 25 kr.

...logue des aurores boréales observées en Suède depuis le XVI:me ...e jusqu'à l'année 1877 y comprise, rédigé par R. Rubenson. 2:de ...le (1800—1877) ..... 10,00.
...träge zur fossilen Flora Grönlands von Dr Oswald Heer Prof. ... 6 tafeln ..... 4,00.
...ttagen af författaren.
...optera insamlade under den Nordenskiöldska expeditionen 1875 på ...a öar vid Norges nordvestkust, på Novaja Semlja och ön Waigatsch ...t vid Jenisej i Sibirien, af Fr. W. Mäklin ..... 2,50.
...some new and little known diatoms, by P. T. Cleve. With 6 plates 4,50.
...les integrales définies des fonctions d'une variable complex. Par ...an Dillner ..... 1,00.
...spår af några evertebrerade djur m. m. och deras paleontologiska ...delse. Af A. G. Nathorst. Med 11 taflor.
...Med öfversättning till Franska språket:
...noire sur quelques traces d'animaux sans vertèbres etc. et de leur ...ée paléontologique par A. G. Nathorst..... 9,50.

Nittonde Bandet (1881). Första häftet. 20 kr.

...aftryck af medusor i Sveriges kambriska lager, af A. G. Nathorst. ... 6 taflor ..... (34 sid.) 3,00.
...la résistance electrique du vide. Par E. Edlund ..... (18 sid.) 0,90.
...dien über den Bau und das Wachsthum des Hummerpanzers und ...Molluskenschalen. Von Tycho Tullberg. Mit 12 Tafeln (57 sid.) 5,50.
...the reticularian Rhizopoda of the Caribbean Sea. By A. Goës. ...h 12 plates ..... (150 sid.) 7,50.
5. Recensio critica Lepidopterorum Musei Ludoviciæ Ulricæ, quæ descripsit Carolus a Linné. Auctore P. O. Chr. Aurivillius. Cum tabula colorata..... (188 sid.) 6,75.

Nittonde Bandet (1881). Andra häftet. 26 kr.

6. On the Silurian Gastropoda and Pteropoda of Gotland, by G. Lindström With 21 plates ..... (250 sid.) 14,75.
7. On Pourtalesia a Genus of Echinoidea, by Sven Lovén. With 21 plates..... (95 sid.) 13,00.

Tjugonde bandet (1882 och 1883). Första häftet. 22 kr.

1. Recherches sur le passage de l'électricité à travers l'air raréfié. Par E. Edlund ..... (20 sid.) 1,00.
2. Contributions à la flore fossile du Japon. Par A. G. Nathorst. Avec 16 planches..... (92 sid.) 9,50.
3. Jordmagnetiska bestämningar i Sverige under åren 1872—1882. Af Rob. Thalén. Med 1 tafla ..... (66 sid.) 2,00.
4. Zur Anatomie der Beckenregion bei Insectivora, mit besonderer Berücksichtigung ihrer morphologischen Beziehungen zu derjenigen anderer Säugethiere. Von Wilhelm Leche. Mit 10 Tafeln ..... (113 s.) 9,00.
5. Se Band 20. Häfte 2.
6. Nya bidrag till kännedomen om Spetsbergens kärlväxter och dess växtgeografiska förhållanden. Af A. G. Nathorst. Med 2 kartor. (88 sid.) 4,00.
7. Sur la grandeur de l'induction unipolaire de la terre. Par E. Edlund ..... (14 sid.) 0,50.

Tjugonde bandet (1882 och 1883). Andra häftet. 22 kr.

5. The Algæ of the arctic Sea. A survey of the species, together with an exposition of the general characters and the development of the flora. By F. R. Kjellman. With 31 plates..... (344 sid.) 18,00.
6. Se Band 20. Häfte 1.
7. Se Band 20. Häfte 1.
8. Norrlands lafvar. Af P. J. Hellbom ..... (131 sid.) 3,50.
9. Report on fragments of fossil fishes from the palæozoic strata of Spitzbergen. By E. Ray Lankester. With 4 plates ..... (7 sid.) 4,00.

Tjugoförsta bandet (1884 och 1885). Första häftet. 50 kr.

1. v. Dunikowski, Emil. Ueber Permo-Carbon Schwämme von Spitzbergen. Mit 2 Tafeln ..... (18 sid.) 1,75.
2. Dunér, N. C. Sur les Etoiles à spectre de la troisième classe. Avec une planche ..... (137 sid.) 6,50.
3. Hjeltström, S. A. Om nederbördens förändringar inom Sverige under sommarhalfåret. Med 2 taflor..... (30 sid.) 2,00.
4. Lindman, C. Om postflorationen och dess betydelse såsom skyddsmedel för fruktanlaget. Med 4 taflor ..... (81 sid.) 4,75.
5. Bovallius, C. Contributions to a monograph of the Amphipoda Hyperiidea. Part I: 1. The families Tyronidæ, Lanceolidæ and Vibilidæ. With 10 plates ..... (72 sid.) 6,00.
6. Fristedt, K. Bidrag till kännedomen om de vid Sveriges vestra kust lefvande Spongiæ. Med 4 taflor ..... (56 sid.) 3,75.
7. Wirén, A. Om circulations- och digestionsorganen hos Annelider af familjerna Ampharetidæ, Terebellidæ och Amphictenidæ. Med 6 taflor ..... (58 sid.) 5,50.
8. Smitt, F. A. Kritisk förteckning öfver de i Riksmuseum befintliga Salmonider..... (290 sid.) 25,00. Med 6 taflor och 13 tabeller i särskildt häfte. Folio.

Tjugoförsta bandet (1884 och 1885). Andra häftet. 24 kr.

9. Thorell, T. and Lindström, G. On a silurian Scorpion from Gotland. With 1 plate ..... (33 sid.) 2.00.
10. Edlund, E. Recherches sur la force electromotrice de l'étincelle électrique ..... (14 sid.) 0,75.
11. Leche, W. Ueber die Säugethier-Gattung Galeopithecus. Mit 5 Tafeln ..... (92 sid.) 5,50.
12. Wille, N. Bidrag til Algernes physiologiske Anatomi. Med 8 Tavler og flere tabeller ..... (104 sid.) 7,50.
13. Appellöf, A. Japanska Cephalopoder. Med 3 taflor ..... (40 sid.) 2,25.
14. Nathorst, A. G. Nouvelles observations sur les traces d'animaux et autres phénomènes d'origine purement mécanique décrits comme »Algues fossiles». Avec 5 planches..... (58 sid.) 8,00.
15. Aurivillius, Chr. Revisio monographica Microceridarum et Protomantinarum. Försök till en monografisk bearbetning af Curculionidgrupperna Microceridæ och Protomantinæ. Med 10 taflor . (87 sid.) 8,50.
16. återtagen af författaren.
17. van't Hoff, J. H. Lois de l'équilibre chimique dans l'état dilué, gazeux ou dissous ..... (58 sid.) 2,00.

Bihang till K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar.

...ndet.	1:a	häft.	...	3,75.	4:e	Bandet.	2:a	häft.	..	8,00.	8:e	Bandet.	1:a	häft.	...	10,00.	11:e	Bandet.	2:a	häft.	...	8,50.
»	2:a	»	...	4,25.	5:e	»	1:a	»	.	5,00.	»	»	2:a	»	..	13,00.	12:e	»	1:a	afd.	...	4,00.
»	1:a	»	...	4,50.	»	»	2:a	»	...	9,00.	9:e	»	1:a	»	.	10,00.	»	»	2:a	»	...	4,00.
»	2:a	»	...	6,00.	6:e	»	1:a	»	...	8,00.	»	»	2:a	»	..	15,00.	»	»	3:e	»	...	7,00.
e »	1:a	»	...	5,50.	»	»	2:a	»	...	9,00.	10:e	»	1:a	»	...	8,00.	»	»	4:e	»	...	1,7
»	2:a	»	...	6,00.	7:e	»	1:a	»	...	9,00.	»	»	2:a	»	...	12,00.						
e »	1:a	»	...	8,00.	»	»	2:a	»	...	12,75.	11:e	»	1:a	»	...	15,00.						

Pour l'étranger s'adresser à

Rudolph Hartman, Leipzig. **R. Friedländer & Sohn**, Berlin.

P. A. Norstedt & Sö

PDO 3663-30
UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARY
PLEASE LEAVE THIS CARD
IN BOOK POCKET
LOCATION